Über die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik

Teildruck der

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Hans Wiesler

aus Starrkirch (Solothurn)

Bern, 1944

Über die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik

Teildruck der

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der philosophischen Doktorwürde
vorgelegt der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität Basel

von

Hans Wiesler

aus Starrkirch (Solothurn)

Bern, 1944

Genehmigt von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der Herren Dr. E. Zwinggi und Dr. H. Renfer.

Basel, den 2. Februar 1944

Prof. Dr. Ed. Handschin
Dekan

Herrn Hans Wiesler wurde von der Philosophisch-naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Basel am 1. Februar 1944 erlaubt, diese verkürzte Fassung seiner am 2. Februar 1944 genehmigten Inaugural-Dissertation drucken zu lassen. Die vollinhaltliche Arbeit mit dem Titel:

Über die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik

kann eingesehen oder entliehen werden:

1. im versicherungstechnischen Seminar der Universität Basel;
2. in der Universitätsbibliothek Basel;
3. in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern.

Separatabdruck aus den
«Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker»
1944 – Heft 1

Gedruckt bei Stämpfli & Cie., Bern

Über die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik [1]

Von *Hans Wiesler*, Dornach

Einleitung

Ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung geeignet, für den Aufbau der Mathematik der Lebensversicherung die absolute Grundlage zu sein, oder sind wir gezwungen, in der Grundlegung von der Verwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Erkenntnisse gänzlich abzusehen? Diese Frage ist, ungeachtet der jahrzehntelangen Bemühungen, heute noch wenig geklärt; einmal eine endgültige Lösung zu finden, scheint uns auch ausgeschlossen. Es wird kaum je eintreffen, dass wir die Grenzen und Bedingungen erfassen können, welche für eine Übertragung der Ergebnisse aus der reinen Mathematik auf die Wirklichkeit gelten. So hat *Einstein* [2]) einmal gesagt, soweit die Gesetze der Mathematik sich auf die Wirklichkeit bezögen, seien sie nicht sicher, und soweit sie sicher seien, bezögen sie sich nicht auf die Wirklichkeit. *Platon, Galilei, Leibniz, Laplace, Gauss* u. a. haben versucht, eine Antwort auf die Frage zu geben, inwieweit mathematische Erkenntnisse übertragbar sind; in ihren Ansichten spiegelt sich zugleich der Wandel des Weltbildes. Glaubte man wirklich eine Zeitlang, die ganze Natur sei «scritta in lingua mathematica» *(Galilei)*, alle Geschehnisse seien streng determiniert und von einem überragenden Geist vorausberechenbar, in einer Differentialgleichung zu erfassen *(Laplace)*, und während noch *Kant* die Ansicht vertrat, es sei in jeder Naturwissenschaft nur so viel Wissenschaft, als in ihr Mathematik vorhanden sei, so sind wir heute durch die Ergebnisse der modernen Physik zu einer wahrscheinlichkeitstheoretischen Auffassung der «Naturgesetze» und zu den Unschärfebeziehungen *(Heisenberg)* gelangt. Ein theoretischer Physiker, *Bavink*, nennt den Ausspruch

[1]) Die vorliegende Abhandlung ist ein Teildruck der Basler Inaugural-Dissertation gleichen Titels (Basel 1943).

[2]) *A. Einstein:* Geometrie und Erfahrung, 1921, S. 3.

Kants den verkehrtesten aller Kantschen Sätze. Während noch Ende des 19. Jahrhunderts das mechanistische Weltbild sich grosser Anerkennung erfreute und man gar soweit ging, alles Lebendige nach physikalisch-chemischen Gesetzen erklären zu wollen *(Häckel, De la Mettrie:* l'homme machine, *Büchner)*, scheint diese Auffassung nun endgültig überwunden. Vom Standpunkt der modernen Physik aus vermuten wir, «dass sich die für die Organismen charakteristischen Gesetze in einer ähnlichen rational genau durchschaubaren Weise von den rein physikalischen Gesetzen abschliessen, wie etwa die der Quantentheorie von denen der klassischen Mechanik» *(Heisenberg)*. Wohl lässt sich bei Organismen der Ablauf vieler Vorgänge nach kolloid-chemischen oder physikalischen Gesetzen denken (z. B. Mutationen als Quantenvorgang), aber schliesslich sind das alles nur Teilerscheinungen und Teildeutungen, die das Ganze nicht erklären.

Vielerorts werden grosse Hoffnungen auf die sogenannte «Gestaltsmathematik»[1]) gesetzt, durch die vielleicht kommende Geschlechter biologische Probleme der mathematischen Behandlung so unterwerfen, wie wir heute die Planetenbahnen der Infinitesimalrechnung. Solange aber der von *Kant* postulierte «Newton des Grashalms» nicht erstanden ist, halten wir unsere Aufgabe für begrenzt. Das Verhalten der Menschen, des «Gegenstandes» der Lebensversicherungsmathematik, kann nicht durch direkte Methoden erfasst werden; innerhalb der Massenerscheinungen ist vielmehr mittels der Verfahren der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung nach Gesetzmässigkeiten zu forschen.

* * *

Dem XII. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker 1940 in Luzern war u. a. die Frage vorgelegt worden: Welche

[1]) Vgl. *Bertalanffy:* Theoretische Biologie, 1932; ferner *H. Friedmann*, Welt der Formen, 2. Auflage, 1932. Ansätze zu dieser Gestaltsmathematik seien vorhanden in den Integralgleichungen der Variationsrechnung, sie seien aber noch so stümperhaft wie die Infinitesimalrechnung zur Zeit Keplers. Von der Gestaltsmathematik gelangen wir durch vereinfachte Annahmen zur Grössenmathematik, wie es von gewissen einzelligen Lebewesen zum Anorganischen nur ein Schritt ist. «Solche Programme mögen einstweilen phantastisch klingen: die Zukunft wird ausweisen, wer Recht gehabt hat, ob diejenigen, die vom sicheren Port des bereits Erreichten aus vor abenteuerlichen Fahrten ins Unbekannte warnen, oder diejenigen, die — wie *Friedmann* — es wagen, den Weg ins unbetretene Gebiet zu weisen» *(Bavink)*.

Hypothesen liegen der Versicherungsmathematik zugrunde und wie kann die Anwendung der Wahrscheinlichkeits- und Risikotheorie im Versicherungswesen begründet werden? Welche Bestätigung findet die Wahrscheinlichkeits- und Risikotheorie durch Erfahrungen aus dem Versicherungswesen?

Die kriegerischen Ereignisse verunmöglichten die vorgesehene Aussprache. Die eingegangenen Abhandlungen wurden indessen veröffentlicht [1]); sie bilden gewissermassen die letzte Schau über die vorherrschenden Ansichten, belegen aber zugleich, wie weit wir davon entfernt sind, die Frage der Anwendbarkeit wahrscheinlichkeitstheoretischer Ergebnisse als abgeschlossen zu betrachten oder unter den Autoren auch nur eine allgemeine Übereinstimmung zu finden. Die einen verneinen die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung schlankweg; andere wieder setzen sie als unumgänglich voraus. Von einzelnen Verfassern wurde auf die Hypothesen hingewiesen, die der Versicherungsmathematik allgemein zugrunde liegen müssen, so z. B. von *Berger* auf die Bohlmannschen Axiome, von *Jean Baptist* auf das Kausalgesetz usw.; all dies geschah indessen fast nur andeutungsweise. Die meisten Arbeiten ergehen sich in technischen Einzelfragen, ohne dass daraus eine abschliessende Meinungsbildung über das gesamte Problem zu gewinnen möglich wäre.

Die vorliegende Arbeit will versuchen, die Lücke, die wir in den Ergebnissen des Luzerner Kongresses empfinden, auszufüllen und einen *Überblick über das gesamte Problem der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lebensversicherungsmathematik zu geben von dessen Anfängen bis zur Gegenwart.* Die Beschränkung auf die *Lebensversicherungs*mathematik ist gegeben einmal durch den Umfang der zu verarbeitenden Ergebnisse, sodann durch die weitgehend andere, wesentlich schwierigere und deshalb noch weniger ausgebaute Methode der Nicht-Lebensversicherung.

In ihrem *ersten* und zugleich *Hauptteil* ist die Untersuchung historisch-kritisch. Erwägungen zweierlei Art rieten uns zu diesem Vorgehen. Einmal ist uns bis heute noch keine Untersuchung bekanntgeworden, welche der geschichtlichen Entwicklung ausreichend nachgeht. Sodann sind wir der Ansicht, es sei, um die Bedeutung des Problems richtig einzuschätzen, wichtig zu wissen, wieviel die Lebens-

[1]) *Berichte des XII. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940,* Band I.

versicherungsmathematik der Wahrscheinlichkeitsrechnung verdankt, und dies ist nicht wenig.

Im *zweiten Teil* unserer Abhandlung wollen wir die Frage nach der Berechtigung der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lebensversicherungsmathematik prüfen. Insbesondere sind die Hypothesen eingehend zu belegen, Hypothesen, die, wie bei jeder Übertragung der Theorie auf die Wirklichkeit, getroffen werden müssen. Wo sich Berührungspunkte mit allgemeinen philosophischen Fragen ergeben, werden diese etwas eingehender dargelegt.

I. TEIL

Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik und kritische Stellungnahme

> On voit que la théorie des probabilités n'est au fond que le bon sens réduit au calcul; elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent s'en rendre compte... Il est remarquable que cette science, qui a commencé par la considération des jeux de hasard, se soit élevée aux plus importants objets des connaissances humaines. *Laplace.*

1. Kapitel

Lebensversicherung und Wahrscheinlichkeitsrechnung bis Jan de Witt

Vom Kommentator der falcidischen Gesetze, dem Präfekten *Ulpian,* besitzen wir Aufzeichnungen, wonach schon in der römischen Kaiserzeit Schätzungen über die mutmassliche Länge des Lebens vorgenommen wurden. Aber von eigentlichen Berechnungen der Prämien für die Versicherung der römischen Kollegien kann in Anbetracht des primitiven Zustandes der damaligen Rechenkunst nicht gesprochen werden. Auch mit den rechnerischen Grundlagen der Rentenkaufgeschäfte des Mittelalters war es nicht besser bestellt. Man wusste lediglich, dass Kinder von zwei bis zwölf Jahren die günstigste Sterblichkeit aufwiesen, somit für die jungen Leben der Rentenkauf ein besonders lohnendes Geschäft bedeutete. Dies war eine Erfahrungstatsache, die nicht irgendwie wahrscheinlichkeitstheoretisch begründet werden konnte. Erst *Christian Huygens* (1629) legte die Voraussetzungen dazu. Sterberegister sind nicht geführt worden; auch wäre man mit der damaligen Rechenkunst nicht imstande gewesen, solche auszuwerten.

Für die im 16. und 17. Jahrhundert aufkommenden *montes pietatis*, *Tontinen* und Reiseversicherungen fehlt ebenfalls jegliche Rechnungsgrundlage. Obwohl die Tontinen als Erwerbsgeschäft gedacht waren, ging doch oft der Tontinarius als der Geschädigte aus. Jede sogenannte Versicherung auf das menschliche Leben war eine Wette, die einerseits den Versicherungsgedanken in Verruf brachte, anderseits aber die fähigsten Köpfe der damaligen Zeit auf die Lösung der damit verbundenen Probleme stiess.

Gewettet und gewürfelt wurde damals um alles mögliche. «Während der Langweile mancher Belagerung im Zelt hatten die Ritter so leidenschaftlich gespielt, dass bald nicht nur die fernen Schlösser und Felder, sondern auch alles, was der Ritter an Kleidung und Rüstung am Leibe trug, verwürfelt wurde, und dies wiederholte sich bei späteren Fehden. Der Tross ahmte die hohen Herren nach, und das Würfelspiel übte in Krieg und Frieden manch Teufelswerk»[1]). So ist es nicht verwunderlich, dass viele Probleme der damaligen Mathematiker Kinder ihrer Zeit waren; die ersten Aufgaben bezogen sich ausschliesslich auf Glücksspiele, so bei *Luca Paciuolo* (gest. 1514), *Cardano* (1501—1576), *Tartaglia* (1500—1557), *Pascal* (1623—1662), *Pierre Fermat* (1601—1665).

In seinem «traité du triangle arithmétique» entwickelte *Pascal* (1665) die Theorie von der Kombinatorik und erkannte deren Zusammenhang mit den Binomialkoeffizienten. Im Jahre 1666 schreibt *Leibniz* eine «dissertatio de arte combinatoria», und *Wallis* widmet diesem Kapitel in seiner «treatise of Algebra» (1685) einen besondern Teil. Von der Kombinatorik führt der direkte Weg zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mit *Christian Huygens* tritt ein neues und sehr wichtiges Moment in die Wahrscheinlichkeitsrechnung ein. Zwar behandelt auch er in seiner Abhandlung «Van rekeningh in spelen van geluck» (1656) oder bekannter in der lateinischen Übersetzung «De ratiociniis in ludo aleae», ausschliesslich Probleme des *Würfelspieles*, wie schon der Titel besagt. Im Briefwechsel *Christian Huygens* mit seinem Bruder *Ludwig* aber werden die Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die *Sterbetafel* von *Graunt* angewendet und dabei der *Begriff der wahrscheinlichen* und der *mittleren Lebensdauer* eingeführt und mathematisch

[1]) *Gleichen-Russwurm:* Die gotische Welt, zitiert aus *H. Braun:* Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik, 1925, S. 33.

definiert. Doch bevor wir auf diesen Briefwechsel näher eingehen können, haben wir den damaligen Stand der Sterblichkeitsmessung kurz darzulegen.

Die Sterblichkeitsmessung nahm ihren Ausgangspunkt fast ausschliesslich in dem Wunsche, Deutungen über Leben und Sterben für einzelne Personen anzustellen. Hexenwahn und Teufelsglaube, und in den oberen Schichten Astrologie, nahmen die Köpfe der damaligen Zeit gefangen. Das Stellen der Horoskope war oft mit schwierigem Rechnen verbunden, und der gelehrte Astrolog hiess Mathematikus. *Regiomontan, Kopernikus, Tycho de Brahe, Galilei, Kepler* u. a. waren auch als Astrologen tätig. Eine Messung im strengen Sinne des Wortes konnte aber erst entstehen, nachdem über Geburt und Tod jeder Person genaue Aufzeichnungen vorlagen.

Das Trienter Konzil (1545—1563) hatte verordnet, dass in jeder Pfarrei ein Taufbuch und ein Ehebuch geführt werden sollen. 1614 schrieb Papst Paul V. die Führung von Sterberegistern vor. In den evangelischen Gebieten war es wohl das Frankfurter Kasteienamt, das 1551 die Führung von Tauf-, Trauungs- und Totenbüchern eingeführt hat. In England wurden die ersten Pfarregister 1538 in Worsop und Melton-on-Hill obligatorisch eingerichtet. Die Londoner Auszüge aus Pfarregistern — die «Bills of Mortality», denen in der Geschichte der Sterblichkeitsmessung eine so grosse Bedeutung zukommt — wurden ungefähr 1592 eingerichtet.

Im Jahre 1662 berechnet *John Graunt* (1620—1672) die erste Sterbetafel aus den eben erwähnten Bills of Mortality der Stadt London. Diese Sterbetafel ist, mit den heute gültigen Maßstäben gewertet, auf ungenügenden Voraussetzungen erstellt; sie wurzelt noch weitgehend in der alten Vorstellung der Zahl 7 als einer mystischen Zahl. Dessen ungeachtet ist sie als die erste Grundlage für eine mathematische Behandlung der Lebensversicherung anzusprechen.

Die Absterbeordnung *Graunts* ist wohl die erste statistische Reihe, auf welche die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet worden sind. Wir würden heute sagen, sie habe als erste sogenannte statistische Wahrscheinlichkeiten geliefert, während die Wahrscheinlichkeiten der Würfelspiele alle Wahrscheinlichkeiten a priori gewesen seien. *Christian Huygens* gebührt der Ruhm, als erster die Verbindung der Wahrscheinlichkeitsrechnung mit der Sterblichkeitsmessung und damit der Lebensversicherungsmathematik voll-

zogen zu haben. In seinem Nachlasse findet sich eine Anzahl Briefe aus dem Jahre 1669, Briefe, die er mit seinem Bruder *Ludwig* gewechselt hat und welche die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf das menschliche Leben und die Rentenberechnung betreffen.

Ludwig Huygens schrieb an seinen älteren Bruder:

Im Haag, den 22. August 1669.

«Ich habe in den letzten Tagen eine Tafel aufgestellt, aus der sich ergibt, wie lange Personen irgendeines Alters noch zu leben haben. Ich habe sie von einer anderen Tafel, die in einem englischen Buche, betitelt ‚the Bills of Mortality', abgedruckt ist, abgeleitet. Ich sende Dir hier eine Kopie dieser Tafel, damit Du dieselben Berechnungen ausführst und wir sehen können, wie unsere Berechnungen übereinstimmen. Ich gestehe, dass ich Mühe gehabt habe, zu Streich zu kommen, aber bei Dir wird es nicht so sein. Die daraus sich ergebenden Folgerungen sind sehr interessant und können bei der Berechnung von Leibrenten sehr nützlich sein. Die Frage ist: Wie lange hat ein Kind von der Geburt an im Verlauf der natürlichen Dinge noch zu leben? Dann ein Kind von 6 Jahren, dann eine Person von 16, von 26 Jahren usw. Wenn Dir Schwierigkeiten oder Hindernisse dabei in den Weg treten, dann bin ich bereit, Dir bei der ersten passenden Gelegenheit meine Methode, die gut ist, mitzuteilen.

Lebe wohl! Nach meinen Berechnungen wirst Du ungefähr bis zum Alter 56½ und ich bis zum Alter 55 leben.»

Die Antwort *Christian Huygens* lautete:

«Es ist sehr verdienstlich von Dir, dass Du die Berechnung der künftigen Lebensdauer, womit Du zuwege gekommen bist, ausgeführt hast. Wenn aber die Berechnung Anspruch auf Richtigkeit machen soll, muss man eine Tafel haben, die von Jahr zu Jahr anzeigt, wie viele Personen von 100 angenommenen sterben, oder Du hast Deine auf eine andere Weise, als ich weiss, ergänzt, denn anders kannst Du in Wahrheit nicht bestimmt haben, wie lange jemand von 6, 16 oder 26 Jahren noch zu leben hat und noch weniger die Lebensdauer von Personen dazwischenliegender Alter, wie Du bezüglich Deines und meines Alters es gemacht hast.

Was ich dagegen als sicher aus den Daten der Tafel ableiten kann, ist, dass, wer wetten würde, dass ein neugeborenes Kind das 16. Lebens-

jahr erreicht, er 4 ungünstige Möglichkeiten gegen 3 günstige hätte. Ebenso bei der Wette, dass jemand von 16 Jahren das Alter 36 erlebt, wo ebenfalls 4 ungünstigen Fällen 3 günstige gegenüberstehen.

Ich habe mich bemüht, die Tafel zu ergänzen, wie ich Dir sagte, und die Probleme zu lösen, die man in bezug auf diesen Gegenstand, der noch sehr vorsichtig anzufassen ist, stellen kann. Deine Methode ist sicher nicht dieselbe wie die meine, und ich werde gern weiter sehen. Lebe wohl!» [1]).

Ludwig Huygens folgerte aus der Zahl der Lebenden im Alter von 6 Jahren und der im Alter von 16 Jahren, dass die zwischen diesen Altern Gestorbenen im Durchschnitt 11 Jahre $\frac{6+16}{2}$ gelebt hätten; er nahm also eine stückweise lineare Absterbeordnung an. *Christian Huygens* hingegen glaubte nicht an den geradlinigen Verlauf und zeichnete mit Hilfe der l_0, l_6, l_{16} usw. der Grauntschen Tafel eine Sterblichkeitskurve und eine Kurve für die wahrscheinliche Lebensdauer. Durch seine Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde Christian auf den Begriff der *wahrscheinlichen* Lebensdauer geführt, während Ludwig eher auf den der *mittleren* hinzielte. Christian erkannte den Unterschied der beiden; denn er schrieb am 28. November 1669 an seinen Bruder:

«Ce sont donc deux choses différentes que l'esperance ou la valeur de l'aage future d'une personne, et l'aage auquel il y a egale apparence, qu'il parviendra ou ne parviendra pas. Le premier est pour regler les rentes à vie et l'autre pour les gageures [2]).»

Christian nahm an, seine Grösse «Erwartung oder der Wert des künftigen Alters eines Menschen» ermögliche die Berechnung einer Leibrente, eine Vermutung, die sich später als unrichtig erwies.

---

[1]) Aus «Bouwstoffen voor de Geschiedenis van de Levensverzekeringen en Lijfrenten in Nederland». Amsterdam 1897. Zitiert aus *H. Braun:* Urkunden und Materialien zur Geschichte der Lebensversicherung und der Lebensversicherungstechnik, 1937, S. 21.

[2]) *H. Braun:* Geschichte, S. 78.

2. Kapitel

Lebensversicherung und Wahrscheinlichkeitsrechnung von Jan de Witt bis Wilhelm Lexis

a) Entwicklung der Lebensversicherungsmathematik bis Mitte des 19. Jahrhunderts

Im Jahre 1671 wollte der holländische Staat wissen, ob es vorteilhafter sei, eine Staatsanleihe als Amortisations- oder als Leibrentenanleihe aufzunehmen. *Jan de Witt* [1]), dem die Aufgabe zu lösen überbunden wurde, ist bei dieser Gelegenheit zum Erfinder der Rentenrechnung [2]) geworden.

Es ist nicht bekannt, inwieweit de Witt die wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen Huygens kannte; jedenfalls treten in seiner Theorie keine Sterbenswahrscheinlichkeiten auf, wie *Eneström* [3]) nachweist.

Edmund Halley (1656—1742), der grosse Astronom, berechnete die zweite Sterbetafel, von der wir Kenntnis besitzen; sie fusst auf Angaben in den Breslauer Sterberegistern. Während Jan de Witt nur den Barwert einer Rente für das Alter von 3 Jahren berechnete, bestimmte Halley diesen Wert für alle durch 5 teilbaren Altersjahre mit einem Rechnungszinsfuss von 6 %. Er definierte im Laufe seines Vorgehens ausdrücklich die *Lebenswahrscheinlichkeit* (probability of life) $\frac{l_{x+1}}{l_x}$, berechnete den Logarithmus des Barwertes der sichern Zahlung «1», die an alle in n Jahren noch Lebenden fällt, also $\log \frac{1}{1{,}06^n}$. Dazu addierte er $\log l_{x+n}$, bildete also

$$\log l_{x+n} + \log \frac{1}{1{,}06^n} = \log \frac{l_{x+n}}{1{,}06^n} .$$

---

[1]) *Jan de Witt* wurde am 24. September 1625 in Dortrecht geboren, am 20. August 1672 vom Pöbel im Haag erschlagen. Er studierte Mathematik in Leyden und die Rechte in Angers. 1653 wurde er Ratspensionär von Holland und Westfriesland und bekleidete somit das höchste Amt im damaligen Holland.

[2]) Über das Verfahren dieser Rentenberechnung siehe *H. Braun:* Geschichte, S. 85.

[3]) *Eneström:* Sur la méthode de Johan de Witt (1671) pour le calcul de rentes viagères. Archief voor de Verzekeringswetenschap, Bd. 3, 1898.

Die Rechnung wird für alle n von 1 bis zum höchsten Alter ω durchgeführt und schliesslich die $\sum_{n=1}^{\omega} \frac{l_{x+n}}{1{,}06^n}$ auf die Anzahl der gegenwärtig Lebenden l_x bezogen; der Quotient ergibt den Barwert der nachschüssigen Leibrente «1».

Halleys Arbeit enthielt alles, was zu einer richtigen Ermittlung des Rentenbarwertes nötig war; gleichwohl wurde sie wenig beachtet und übte kaum einen Einfluss auf die damalige Rentenberechnung aus.

Abraham de Moivre (1667—1754) brachte die Lebensversicherungsmathematik um ein gutes Stück weiter. Im Jahre 1718 erschien seine Abhandlung über Wahrscheinlichkeitsrechnung «The Doctrine of Chances» und 1720, als deren Fortsetzung gedacht, «Letters of reimbursing and paying off Annuities»; endlich folgte im Jahre 1724 das erste Lehrbuch über Rentenrechnung mit dem Titel «Annuities on Lives».

Halleys Sterbetafel liess glauben, die Absterbeordnung verlaufe linear; Moivre, der diese Eigenschaft erkannte, leitete daraus das bekannte «Absterbegesetz» ab $l_x = 86 - x$, wo 86 das höchste vorkommende Alter bedeutet und $86 - x$ somit die Lebensergänzung darstellt. Durch die Annahme des linearen Abfalls der Zahl der Lebenden konnte die Rechnung gegenüber Halley bedeutend vereinfacht werden; einzig darauf kam es Moivre an, und er war sich der Unvollkommenheit seiner Hypothese von Anfang an bewusst.

Moivre sagt: «Auf Grund des vorerwähnten Prinzips (des geradlinigen Abfalls der l_x) habe ich angenommen, dass, sofern n die Lebensergänzung vorstellt, die Wahrscheinlichkeiten, 1, 2, 3,... Jahre zu leben, ausgedrückt sind durch die folgende Reihe:

$$\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n} \ldots,$$

dass folglich der Wert eines Lebens, dessen Ergänzung n ist, ausgedrückt sein wird durch die Reihe

$$\frac{n-1}{nr} + \frac{n-2}{nr^2} + \frac{n-3}{nr^3} + \ldots »\ ^{1}).$$

[1]) Aus *E. Czuber:* A. de Moivres Abhandlung über Leibrenten, 1909.

Die Rentenrechnung Moivres dürfen wir als die direkte Anwendung des Satzes der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeiten ansehen, nachdem vorerst die Quotienten $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \ldots$ als Überlebenswahrscheinlichkeiten definiert worden sind. Inwieweit mit solchen «Wahrscheinlichkeiten» zu rechnen die Berechtigung vorlag, fand durch Moivre und seine engern Nachfolger keine Abklärung. Hätten damals schon die Merkmale der «mathematischen» Wahrscheinlichkeit festgestanden, so wäre trotzdem die Nachprüfung, ob den Überlebenswahrscheinlichkeiten die geforderten Merkmale zukommen, unmöglich gewesen. Denn noch im 20. Jahrhundert sind die Schwierigkeiten, ein Dispersionsmass zu bestimmen, mangels genügender Statistiken nicht behoben; Moivre hätte zur Prüfung einzig die Halleysche Sterbetafel zur Verfügung gestanden.

Bedeutend über Moivre hinaus drang *Thomas Simpson* (1710 bis 1761) [1]. Sein Hauptwerk «Doctrine of Annuities and Reversions deduced from general and evident principles» (1742) verschaffte ihm den Ruf eines der grössen Versicherungsmathematiker aller Zeiten. Er berechnet den Rentenbarwert, indem er zuerst wie Halley die Lebenswahrscheinlichkeit definiert $\frac{l_{x+1}}{l_x}$, diese hierauf diskontiert und summiert.

Definition und Regeln der *zusammengesetzten und totalen Wahrscheinlichkeit* sind bei ihm in einwandfreier Weise angewendet. Allerdings wird bei all seinen Berechnungen stillschweigend die Unabhängigkeit der einzelnen Wahrscheinlichkeiten vorausgesetzt.

Leonhard Euler [2] (1707—1783) befasste sich ebenfalls mit der Berechnung des Rentenbarwertes. Seine Darstellung unterscheidet sich kaum von der heute üblichen. Bemerkenswert ist die Aussage, die Prämien seien etwas zu erhöhen wegen der Verwaltungskosten und wegen der *Abweichungen von dem angenommenen Verlauf der Absterbeordnung.*

C. F. Gauss (1777—1855) hatte im Auftrage des Universitätskuratoriums für die Göttinger Professoren-Witwenkasse [3]) «eine auf

[1]) Er brachte es vom einfachen Dorfschulmeister zum Professor an der Militärakademie in Woolwich.

[2]) 14 der Arbeiten Eulers, davon 10 in französischer und 4 in lateinischer Sprache, betreffen die Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendungen.

[3]) In Band 4 seiner Werke, herausgegeben von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Mortalität und die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* basierte Bilanz zwischen dem Vermögen der Anstalt und ihren Obliegenheiten zu ziehen». Die Schwierigkeit erkennend, welche die Berechnung der Belastung aus einer Versicherung von verheirateten und unverheirateten Männern bietet, schätzt er die Werte nach einem Durchschnittsverfahren ab, ein Vorgehen, das auch heute noch angewendet wird. Auch der Neuzugang ist in die Berechnungen eingezogen. Deutlich weist Gauss darauf hin, dass alle auf die Zukunft bezüglichen Wahrscheinlichkeiten nur beschränkt gültig sind; als einziges Verfahren betrachtet er die periodische Überprüfung der versicherungstechnischen Bilanzen und Berechnungen.

Am 10. Juni 1848 wurde das Institut of Actuaries of Great Britain and Ireland gegründet «zum Zwecke der Förderung aller mit dem Stande der Aktuare zusammenhängenden Interessen, zur Ausdehnung und Verbesserung der wissenschaftlichen Methoden, *welche ihren Ursprung in der Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung haben*, und von denen die Rentenversicherung, die Zinseszinsrechnung und andere analoge Erscheinungen ihre Grundsätze ableiten». In dieser Umschreibung der Aufgabe kommt klar zum Ausdruck, welche Bedeutung der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Probleme der Lebensversicherung beigemessen wurde.

b) Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis Mitte des 19. Jahrhunderts

Im Jahre 1713 gab *Nikolaus I. Bernoulli* das Werk seines Onkels *Jakob Bernoulli*, die «Ars conjectandi» heraus. Das Werk zerfällt in 4 Teile: Der 1. Teil enthält die Abhandlung von *Huygens*, mit Anmerkungen versehen, welche die Originalarbeit oft überragen. Im 2. und 3. Teil findet sich die Kombinationslehre mit den Anwendungen. Der 4. Teil indessen ist als der weitaus wichtigste anzusehen. Behandelten die ersten drei Teile hauptsächlich Probleme des Würfelspieles, so war der letzte gedacht «ad usum et applicationem praecedentis Doctrinae in Civilibus, Moralibus et Oeconomicis». Leider blieb er unvollendet, und wenn er auch die applicationes nicht enthält, so brachte er doch das Theorem, das seither unter dem Namen Bernoullis in die Literatur einging.

In den Philosophical Transactions erschien 1764, von *Price* veröffentlicht, das Problem von *Bayes*, das sich mit der Wahrscheinlichkeit der Ursachen befasst.

Laplace (1749—1827) brachte das Bernoullische Theorem in die Gestalt, wie sie uns heute geläufig ist. Was Bernoulli unter dem genannten Titel des vierten Teiles seines Werkes beabsichtigte, führte Laplace in den «Applications du calcul des probabilités» durch, sowohl in «Théorie analytique» als auch in «Essai philosophique du calcul des probabilités». In diesem letztgenannten Werke findet sich ein Kapitel «Des Tables de mortalité, et des durées moyennes de la vie, des mariages, et des associations quelconques». Darin wird u. a. ausgeführt: «Une table de mortalité est donc une table des probabilités de la vie humaine. Le rapport des individus inscrits à côté de chaque année, au nombre des naissances, est la probabilité qu'un nouveau-né atteindra cette année. Comme on estime la valeur de l'espérence, en faisant une somme des produits de chaque bien espéré, par la probabilité de l'obtenir; on peut également évaluer la durée moyenne de la vie, en ajoutant les produits de chaque année par la probabilité d'y arriver. Ainsi en formant une suite de fractions dont le dénominateur commun soit le nombre des nouveau-nés de la table, et dont les numérateurs soient les nombres inscrits à côté de chaque année en partant de zéro; la somme de toutes ces fractions sera la durée moyenne de la vie, dont il faut pour plus d'exactitude, retrancher une demie-année, ...»

Laplace, dessen Wahrscheinlichkeitsbegriff auf den gleich möglichen Fällen beruhte, gab sich kaum genügend Rechenschaft über die Inhomogenität des Ausgangsbestandes. Er glaubte vielmehr an den Ausgleich nach dem Gesetz der grossen Zahl, wenn er an derselben Stelle ausführt: «La précision de ces résultats exige que pour la formation des tables, on emploie un très grand nombre de naissances. L'analyse donne alors des formules très-simples pour apprécier la probabilité que les nombres indiqués dans ces tables ne s'écarteront de la vérité, que dans d'étroites limites. On voit par ces formules, que l'intervalle des limites diminue et que la probabilité augmente, à mesure que l'on considère plus de naissances; ensorte que les tables représenteraient exactement la vraie loi de la mortalité, si le nombre des naissances employées devenait infini.»

Dass die Wahrscheinlichkeiten nicht konstant sind, weiss Laplace indessen sehr wohl; denn er sagt: «Tant de causes variables influent sur la mortalité; que les tables qui la représentent, doivent changer suivant les lieux et les temps. Les divers états de la vie offrent

à cet égard, des différences sensibles relatives aux fatigues et aux dangers inséparables de chaque état, et dont il est indispensable de tenir compte dans les calculs fondés sur la durée de la vie. Mais ces différences n'ont pas encore été suffisamment observées [1]).»

Der Versicherungsmathematiker vernahm von Laplace nicht viel mehr über die Sterbe- und Überlebenswahrscheinlichkeiten als er schon wusste; dagegen hat Laplace durch seine genaue Formulierung der «espérence mathématique» viel zur Behandlung des Risikoproblems beigetragen.

c) Entwicklung der Risikotheorie

Johann Nikolaus Tetens [2]) (1736—1807) war der erste Mathematiker, der den Begriff des *Risikos* in die Lebensversicherung einführte; er befasste sich damit im zweiten Teil seiner «Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben einer oder mehrerer Personen abhängen...». Der Satz von der mathematischen Hoffnung oder Erwartung war bekannt, noch bevor ihn Laplace genauer formulierte. Auf ihm baut sich der Risikobegriff von Tetens auf.

Er bestimmte den Risikofonds, der zum Ausgleich der Gefahr nötig wäre; heute hingegen sehen wir darin nur noch einen Vergleichsmaßstab für verschiedene Unternehmungen.

Beschränkte sich bisher die Verwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lebensversicherungsmathematik auf die *Sätze der totalen und zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit*, so begegnen wir bei Tetens zum erstenmal einer Weiterführung im Sinne der Heranziehung des *Satzes von der mathematischen Hoffnung*. Dadurch wurde eine Problemstellung völlig neu eingeführt, die zu einer sehr umfangreichen Literatur Anlass gab.

Was Tetens, wie er selbst gesteht, nicht gelungen ist, das Risiko der einzelnen Renten zu berechnen, erreichte *Carl Bremiker* in seiner Abhandlung «Das Risiko der Lebensversicherungen» (1859). Bremiker geht von dem in der Fehlertheorie meist verwendeten mittleren Fehler aus; sein Risiko ist die Quadratwurzel aus der kleinsten Quadratsumme

[1]) Essai philosophique sur les probabilités, Troisième édition, 1816, pages 164 et suiv.

[2]) Geboren in Tetenbüll im Herzogtum Schleswig, Professor der Physik an der mecklenburgischen Universität Bützow, später Professor der Mathematik und der Philosophie in Kiel. Er starb in Kopenhagen.

der Abweichungen, die möglich ist. Ausgangspunkt ist also die Methode der kleinsten Quadrate. Von zufälligen Schwankungen der beiden Rechnungsgrundlagen Sterblichkeit und Verzinsung ist aber weder bei der Definition des durchschnittlichen Risikos durch Tetens noch bei der Definition des mittleren Risikos durch Bremiker die Rede.

Zech in der Abhandlung «Über das Risiko bei Lebensversicherungen» (1861) und später *Onnen* in «Het Maximum van verzekered Bedrag» (1896) wiesen nach, dass die Methode der kleinsten Quadrate zur Berechnung des mittleren Risikos nach *Bremiker* nicht anwendbar sei, da die drei Grundbedingungen nicht erfüllt seien:

1. die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung ist um so grösser, je kleiner diese Abweichung ist;
2. die Wahrscheinlichkeit einer positiven Abweichung ist gleich der einer negativen von derselben Höhe;
3. das arithmetische Mittel aller Abweichungen vom wahrscheinlichsten Wert ist gleich Null.

Aus diesem Grunde spricht Onnen den Ableitungen von Bremiker jeden wissenschaftlichen Wert ab, jedoch zu Unrecht. Denn *F. Boehm* zeigte in dem zusammenfassenden Aufsatze «Über die Entwicklung und den gegenwärtigen Stand der Risikotheorie in der Lebensversicherung» [1]), dass Bremiker die Methode der kleinsten Quadrate ihrem Wesen nach gar nicht anwendete, obwohl er es zu tun vorgibt.

Bei der üblichen Berechnung der Prämien und Reserven will *Bremiker* von einer Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung nichts wissen und wendet sich scharf gegen Autoren, «welche einleitende Kapitel über dieselbe bringen und im folgenden davon gar keinen Gebrauch machen». Hingegen glaubt er, «der Risikobegriff dürfe nur der Wahrscheinlichkeitslehre, und zwar speziell der Methode der kleinsten Quadrate entnommen werden».

Karl Hattendorf «Über die Berechnung der Reserve und des Risikos bei der Lebensversicherung» und «Das Risiko bei der Lebensversicherung» [2]) und vor ihm *Theodor Wittstein* [3]) glaubten, dass, wenn säkulare Änderungen ausser acht gelassen werden können,

[1]) II. Teil, Das Versicherungsarchiv, 1934/35.

[2]) In Masius, Rundschau der Versicherungen, 18. Jahrgang, 1868.

[3]) Mathematische Statistik, 1867, ferner, Das mathematische Risiko bei Versicherungsgesellschaften, 1885.

die noch verbleibenden Abweichungen von der Sterbenswahrscheinlichkeit als zufällig, d. h. als nach dem Exponentialgesetz verteilt, anzunehmen seien. Die Zahlen der Sterbetafel sind dann nicht die wahren, sondern die wahrscheinlichsten Werte, auf welche sich die Abweichungen beziehen. Es wird also insbesondere auch die Unabhängigkeit der einzelnen Beobachtungen unter sich vorausgesetzt. Dass diese Annahmen zutreffen, wurde erst durch die spätern Dispersionsuntersuchungen festgestellt.

Das Verteilungsgesetz $T_a = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 a^2}$ mit $h^{-2} = 2spq$ und $a > m - sp$ vorausgesetzt, ergibt sich auf Grund des Bernoullischen Theorems die *durchschnittliche Abweichung*

$$\delta = 2 \int_0^\infty a T_a \, da = \sqrt{\frac{2spq}{\pi}}$$

oder auf den besondern Fall der Sterbetafel angewendet

$$\frac{1}{2}\delta = \sqrt{\frac{l_x p_x q_x}{2\pi}} \sim 0{,}4 \sqrt{l_x p_x q_x} = R_x$$

Diesen Wert R_x bezeichnet Wittstein als durchschnittliches Risiko der betrachteten Gesamtheit von l_x Versicherten des Alters x für das nächste Jahr.

Eine Erweiterung der Ergebnisse von Wittstein, besonders in ihrer Anwendung auf die verschiedenen Versicherungsarten, brachte *Max Mack* in der Abhandlung «Das Risiko bei Lebensversicherungen»[1]). Er teilt aber mit Wittstein den Irrtum, die mittleren Fehler auch in den Fällen quadratisch zusammenzusetzen, wo eine *Unabhängigkeit* der einzelnen Spiele nicht gegeben ist, die von einer Person oder von einer Gruppe gleichaltriger Personen in den einzelnen aufeinanderfolgenden Jahren gespielt werden.

Im Jahre 1898 erschien das Werk von *Karl Wagner:* «Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung», das auf eine vollständige Ablehnung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lebensversicherungsmathematik hinausläuft. Wir machen uns darüber das Urteil

[1]) In Ehrenzweig: Assekuranz Jahrbuch, 12. Band, 1891.

F. Boehms zu eigen: «Es ist mir über unser Thema keine Veröffentlichung bekannt, welche mit einer überaus reichlichen Darbietung des Stoffes einen derartigen Mangel an Verständnis für die eigentlichen Aufgaben der Risikotheorie verbindet, wie dieses Buch Wagners, was nur daraus zu erklären ist, dass dieser Verfasser mit völlig unzulänglichen theoretischen Kenntnissen an das schwierige Problem heranging [1].» Die Behauptungen Wagners wurden besonders durch *Peek* «Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung» [2] widerlegt, indem er durch die Lexissche Dispersionstheorie die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Lebensversicherung nachwies.

* * *

Wir versuchen, rückblickend zu ermessen, wie weit die Wahrscheinlichkeitsrechnung die Lebensversicherungsmathematik beeinflusst und gefördert hat. Beide Wissenschaften sind miteinander geboren: weltanschauliche und gesellschaftliche Auswüchse derselben Zeit waren es, die jene Sucht hervorbrachten, mit allem zu spielen und um alles zu wetten. So wie man zuerst die Gesetze ergründete, denen die Spiele und Wetten unterworfen waren, so schien es nur natürlich, die gefundenen Regeln auch auf die Wetten mit dem menschlichen Leben, auf die Rentenkäufe, anzuwenden. Der erste, der dies tat, *Christian Huygens*, war zugleich auch der Begründer der Wahrscheinlichkeitstheorie. Alle, die folgten, so *Halley*, *Moivre*, *Simpson*, *Price*, *Tetens*, schritten auf demselben Wege; sie bildeten aus der Absterbeordnung die grundlegende Lebenswahrscheinlichkeit p_x, berechneten damit die Versicherungsbarwerte, gaben sich aber keine Rechenschaft, ob die Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung überhaupt auf solche «Wahrscheinlichkeiten» anwendbar seien. Der Übergang von den Glücksspielen zu der statistisch gegebenen Absterbeordnung war völlig naiv. *Laplace* war sich der Inkonstanz der Wahrscheinlichkeiten und der Inhomogenität der beobachteten Risiken wohl bewusst, glaubte aber an einen Ausgleich nach dem Gesetz der grossen Zahlen und hielt damit die Frage für erledigt. Hätte jemand diese Klassiker der Versicherungsmathematik aufmerksam machen können, wie das Rechnen mit diesen Wahrscheinlichkeiten nur unter

[1] Das Versicherungsarchiv, 1938/39, S. 279.
[2] In der Zeitschrift für Versicherungsrecht und Wissenschaft, 1899.

gewissen Bedingungen erlaubt sei, so wäre es ihnen wohl ergangen wie den Mathematikern, als sie erfuhren, dass man mit unendlichen Reihen nicht rechnen dürfe, ohne sich über deren gleichmässige Konvergenz Rechenschaft zu geben. Es hat lange gedauert, bis man auf den Gedanken kam, die Lebens- und Sterbewahrscheinlichkeiten näher zu untersuchen. Das Bernoullische Theorem schuf 1713 die Voraussetzung dazu; aber erst 1878 berechnete *Dormoy* den ersten *Dispersionskoeffizienten*. Der Grund, warum eine so lange Zeitspanne ungenützt verstrich, lag zum Teil in den unzureichenden Statistiken, zum Teil in der überragenden Autorität von *Laplace*, dessen Wahrscheinlichkeitsbegriff a priori auf lange Zeit die Theorie beherrschte.

3. Kapitel

Lebensversicherung und Wahrscheinlichkeitsrechnung von Wilhelm Lexis bis zur Gegenwart

a) Das Dispersionsmass

Alle Wahrscheinlichkeiten im Gebiete der menschlichen Massenerscheinungen sind statistischer Natur. Nach der Definition der Wahrscheinlichkeit in Analogie zum Würfelspiel, als Verhältnis der Zahl der günstigen zu der Zahl der möglichen Fälle, glaubten die Versicherungsmathematiker echte Wahrscheinlichkeiten vor sich zu haben, auf welche die bekannten Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung anwendbar seien. Diese Regeln und das Äquivalenzprinzip bestimmten die ganze Versicherungsmathematik; insbesondere wurde stillschweigend auch die Hypothese der Unabhängigkeit der Wahrscheinlichkeiten getroffen. Die Begründung der höheren Wahrscheinlichkeitstheorie, die mit dem Bernoullischen Theorem anhebt, änderte am Vorgehen vorläufig nichts. *Bernoulli* und *Poisson* zogen auch die statistische Wahrscheinlichkeit in ihre Betrachtungen ein; erst *Laplace* rückte auf lange Zeit den Wahrscheinlichkeitsbegriff a priori in den Mittelpunkt. Man darf aber wohl behaupten, dass nur die einfache mathematische Definition der Wahrscheinlichkeit a priori den Ausbau und die Verbreitung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in so kurzer Zeit ermöglichten; bei der Definition der verwickelteren statistischen Wahrscheinlichkeit wäre dies kaum der Fall gewesen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hätte überhaupt keine praktische Bedeutung und fände besonders im Versicherungswesen keinen Platz, wenn sie auf die aprioristische Definition beschränkt wäre, da streng genommen nie entschieden werden kann, wann gleichmögliche Fälle vorliegen. Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen wir es in der Lebensversicherung zu tun haben, unterscheiden sich wie alle statistischen von den mathematischen in der

1. *Ungleichheit der Fälle*, da die Sterblichkeit der einzelnen Personen von Beruf, Wohnort, Einkommen usw. abhängt,
2. *Abhängigkeit der einzelnen Fälle voneinander*, da der Tod der einen Person oft den der andern zur Folge hat,
3. *Inkonstanz der Wahrscheinlichkeiten* über die verschiedenen Jahre.

Es bleibt aber die Frage offen, ob die drei genannten Tatsachen so zusammenwirken, dass man *praktisch* von einer mathematischen Wahrscheinlichkeit sprechen kann. Mit dieser Fragestellung sind wir beim Kern des Problems angelangt; je nach dem Ergebnis wird die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lebensversicherungsmathematik zu bejahen oder zu verneinen sein. Die Antwort gibt uns das Kriterium von *Lexis* und *Dormoy*, das wir wegen seiner Wichtigkeit im II. Teil der Arbeit kurz formulieren. Danach haben wir zu untersuchen, ob der Sterbenswahrscheinlichkeit normale Dispersion entspricht oder nicht, d. h. ob das Dispersionsmass gleich 1 ist.

Dormoy führte als erster in der 1878 erschienenen «Théorie des assurances sur la vie» Untersuchungen durch an der Sterbeziffer der Gesamtbevölkerung in Frankreich. Für die Jahre 1849—1858 fand er als Dispersionsmass (Divergenzkoeffizient) den Wert 8,6, für die Jahre 1859—1869 den Wert 6,3. Den Ergebnissen von *Dormoy* fehlt indessen die allgemeine Gültigkeit, weil alle Alter zusammengefasst worden sind, obschon der Unterschied in den Sterbeziffern der einzelnen Altersklassen sehr bedeutend ist. *Lexis* hingegen bestimmte den Dispersionskoeffizienten durch einwandfreie Untersuchungen für das Alter 0 der belgischen Bevölkerung; er fand dafür den Wert 9.

Mit diesen Ergebnissen von *Dormoy* und *Lexis* schien das Urteil gegen die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lebensversicherung gesprochen; denn den Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeiten p_x und q_x kommt weder der Charakter von mathematischen noch von echten statistischen Wahrscheinlichkeiten zu.

Nach *Lexis* untersuchte der Holländer *Peek* [1]) das Dispersionsmass für jedes Alter der zehnjährigen Periode 1880—1889; er fand:

Alter x	Dispersionsmass Q	Alter x	Dispersionsmass Q
0	6,46	20	1,25
1	4,57	30	1,28
2	3,68	40	1,43
3	3,84	50	1,56
5	2,52	60	1,12
7	1,84	70	2,24
9	1,19	80	0,97
10	0,82	90	0,81

Die ersten Altersjahre zeigen eine übernormale Dispersion; vom Alter von 10 Jahren an jedoch darf die Dispersion als normal gelten, da sie nur wenig von 1 abweicht.

Bohlmann [2]) berechnete die Dispersion aus den Erfahrungen der «Leipziger» und der «Gothaer» für die Jahre 1869—1880 und 1880 bis 1894; es ergab sich:

Gothaer		Leipziger	
Alter x	Dispersionsmass Q	Alter x	Dispersionsmass Q
26—30	0,8	21½—25½	0,9
31—35	0,8	26½—30½	1,0
36—40	1,3	31½—35½	1,8
41—45	0,9	36½—40½	1,5
46—50	0,9	41½—45½	1,1
51—55	0,8	46½—50½	0,8
56—60	1,2	51½—55½	1,2
61—65	1,0	56½—60½	1,1
66—70	1,0	61½—65½	0,9
71—75	1,1	66½—70½	0,9
76—80	1,2	71½—75½	1,0
81—85	1,1	76½—80½	1,1
86—90	1,1	81½—85½	1,1

[1]) Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung, von Dr. *J. H. Peek*, in der Zeitschrift für Versicherungsrecht und Wissenschaft, 1899, Bd. V, S. 169.

[2]) In *Klein und Rieke:* Über angewandte Mathematik und Physik, S. 142.

Unter der Leitung von *Blaschke* [1]) führten die Hörer des Versicherungskurses der Wiener Technischen Hochschule Untersuchungen durch über den Dispersionskoeffizienten der Tafel H^M, es folgte:

Alter x	Dispersionsmass Q	Alter x	Dispersionsmass Q
25	0,67	50	0,95
30	1,43	55	1,07
35	1,09	60	1,17
40	1,04	65	0,83
45	1,41	70	0,91

Weitere Untersuchungen folgten durch *Engelbrecht* (1905), *Braun* (1911), *Jastremsky* (1912) u. a. In seinem «Gesetz der kleinen Zahlen» wies *Bortkeiwicz* nach, dass Massenerscheinungen mit kleinen Ereigniszahlen eher normale Dispersion aufweisen als solche mit grossen Zahlen. Die aus den genannten Tabellen hervorgehenden Ergebnisse wurden bestätigt durch die weit umfangreicheren Untersuchungen von *Lange* [2]) anhand der statistischen Ergebnisse im Staate Preussen für die Jahre 1867—1926. Lange fand die Häufigkeitsverteilung der Sterbenswahrscheinlichkeiten als annähernd normal.

So wertvoll diese Untersuchungen auch waren, so vermochten sie doch die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lebensversicherung nicht endgültig zu entscheiden. *Von Krieg* führt in seinen «Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung» (1866) aus, «dass im Gebiete der Massenerscheinungen der menschlichen Gesellschaft eine zutreffende Angabe numerischer Wahrscheinlichkeit fast nirgends gemacht werden kann». Blaschke hingegen äussert sich in seinen «Vorlesungen über mathematische Statistik» [1]) durchaus bejahend. In seiner «Versicherungsmathematik» [3]) meint *Broggi:* «Wenn es auch nicht völlig begründet ist, die Frage der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Lebensversicherungsmathematik entschieden zu bejahen, so scheinen doch die vorhergehenden Untersuchungen (jedenfalls wenn man die ersten Altersstufen ausschliesst)

[1]) Vorlesungen über mathematische Statistik, S. 144.
[2]) Wirtschaft und Recht der Versicherung, Heft 2, 1932.
[3]) Versicherungsmathematik, Deutsche Ausgabe, 1911, S. 162.

eher eine bejahende als eine verneinende Antwort zuzulassen». Auch *Czuber* [1]) betrachtet bei normaler Dispersion die Sterbenswahrscheinlichkeit als echte statistische Wahrscheinlichkeit.

Die Bedeutung des Lexisschen Kriteriums für die Versicherungsmathematik ist teilweise überschätzt worden. Durch die grosse Zahl der Beobachtungen kann wohl ein gewisser Ausgleich geschaffen werden für die Ungleichheit und die Abhängigkeit der Fälle voneinander, nicht aber für die Inkonstanz, die nicht durch zufällige, sondern durch wesentliche Einflüsse verursacht wird. Trenduntersuchungen zeigen ein annähernd lineares Abfallen der Sterblichkeitsverhältnisse in der Zeit. Aber gerade über die Konstanz, welche die wichtigste ist, da die Berechnungen sich auf die Zukunft beziehen, verschafft das Dispersionskriterium keine Klarheit. Die berechneten Dispersionsquotienten beziehen sich auf kurze Zeitspannen; sie umfassen meist 10 Jahre, wodurch es auch erklärlich wird, dass sie wenig um die Einheit schwanken.

Auf einige andere Tatsachen ist indessen noch aufmerksam zu machen. Der Wert p_x, auf den die Berechnung des Dispersionsmasses abstellt und den wir mit $p_{x,0}$ bezeichnen wollen, braucht als Mittelwert den Werten $p_{x,i}$ gar nicht anzugehören (i = Beobachtungsjahr). Es ist sogar wahrscheinlich, dass der zur Bestimmung der Versicherungsbarwerte wirlich gebrauchte Wert $p_{x,i}$ erheblich von ihm abweicht, da die gleiche Sterbetafel auf längere Zeit die Rechnungsgrundlage bildet. Es nützt wenig, zu wissen, dass der mittlere Fehler $m = \frac{1}{r} \sum | p_{x,0} - p_{x,i} |$ (r = Zahl der Beobachtungsjahre) klein ist, während gerade bei langen Zeitspannen die wirkliche Abweichung $| p_{x,0} - p_{x,i} |$ des wahrscheinlichsten Wertes $p_{x,0}$ von dem in der Versicherung gebrauchten $p_{x,i}$ vielleicht gross ist. Die zahlenmässige Angabe des Dispersionsmasses Q hat für die Abschätzung der finanziellen Auswirkung nur beschränkten Wert; wichtiger scheint die Entwicklung des Trends.

Den einzelnen empirisch bestimmten Werten $p_{x,i}$ kommen verschiedene Gewichte zu. Diese Tatsache wird aber oft vernachlässigt, sowohl bei der Bestimmung von $p_{x,0}$ aus den gleichgenau voraus-

[1]) Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, Band II, 1928.

gesetzten Werten $p_{x,i}$ als auch in der Formel $\sqrt{\frac{2pq}{n}}$, in der n mit einer gewissen Willkür angenommen wird.

Braun schreibt in seinem Aufsatz «Der Rhythmus der Lebensvorgänge und seine Verursachung»[1]: «Die *Lexissche* Dispersionstheorie lässt uns nämlich nachweisen, dass, wenn die Divergenzkoeffizienten immer gleich 1 wären, eine Stetigkeit der Sterbevorgänge gegeben wäre und dass dann die gewöhnlichen Gesetze der klassischen Physik gelten würden. Das rhythmische Lebens- und Sterbegeschehen ist also auch aus diesem Grunde ein Quantengeschehen.» In der Tat könnten wir, wenn $Q = 1$ ist, über die Beobachtungsjahre eine konstante Wahrscheinlichkeit annehmen; es dürfen aber auch unwesentliche Abweichungen davon vorkommen; nur müsste der Häufigkeitsstreckenzug genau eine Gausskurve sein. Also auch ohne die physikalische Schwankungskomponente (um mit Lexis zu reden) würde das Gesetz der Sterbenswahrscheinlichkeiten kein streng determiniertes Gesetz im Sinne der klassischen Physik sein, sondern ein durch das Gaußsche Fehlerintegral in bestimmten Grenzen gegebenes statistisches Gesetz. Aus den wesentlichen Abweichungen kann nicht der Schluss gezogen werden, das Absterben sei ein quantenphysikalischer Vorgang; denn auch hier haben wir es mit Gesetzen von bestimmten, stets gleichbleibenden Wahrscheinlichkeiten zu tun.

b) Die Bohlmannschen Axiome

Zu Beginn des 20. Jahrhunderts stand die Lebensversicherungsmathematik als ein ansehnlicher Zweig der angewandten Mathematik da. Die Bestrebungen in der modernen Mathematik, jede der Einzeldisziplinen auf logisch einwandfreien Grundlagen aufzubauen — wobei allerdings die Formulierung dieser Grundlagen selbst die grössten Schwierigkeiten bietet —, löste auch in der Versicherungsmathematik nach *Bohlmann* den Wunsch aus, «ein System von Annahmen und Sätzen aufzustellen, aus denen die Rechnungsregeln der Lebensversicherung folgen». Die Aufgabe erscheint durch den Umstand insofern erschwert, als bisher keine allgemein verbindliche Aussage über den Wahrscheinlichkeitsbegriff selbst gefunden werden konnte und vorab die beiden hauptsächlichsten Definitionen, die klassische und

[1]) Blätter für Versicherungsmathematik und verwandte Gebiete, Band 5, 1941, S. 207.

die später durch v. Mises eingeführte, für die Versicherungsmathematik nicht ohne weiteres anwendbar sind. Ein formal einwandfreier Aufbau wird indessen erhalten, sobald gewisse Voraussetzungen und idealisierte Annahmen getroffen werden, die zwar nie genau erfüllt sind, aber doch mit der Wirklichkeit in keinem zu grossen Widerspruch stehen. Gedankengänge dieser Art entwickelte als erster Georg Bohlmann für die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, die er im Jahre 1900 dem 3. internationalen Aktuarkongress vorlegte; später, 1909, reichte er sein System verbessert dem internationalen Mathematikerkongress ein.

Im ersten Teil legt Bohlmann die allgemeinen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitslehre dar. Durch das *Axiom I* soll die Wahrscheinlichkeit «definiert» werden; es lautet: «Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereignis E eintritt, ist eine positive Zahl p, die E zugeordnet ist.»

Wichtiger als die Ausführungen des ersten Teiles, welche die Wahrscheinlichkeitsrechnung kaum wesentlich gefördert haben, und die, wie Axiom I zeigt, den Streit um die Definition des Wahrscheinlichkeitsbegriffes kaum abebben liessen, ist für uns der zweite Teil über die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik. Die Gültigkeit der Sätze der Wahrscheinlichkeitslehre vorausgesetzt, ergeben sich die allgemeinen Rechnungsregeln aus den beiden folgenden Annahmen, die nach Bohlmann auch auf die Versicherung mehrerer Leben ausdehnbar sind.

Axiom I [1]. «Es sei (x) ein im Alter x stehendes Individuum einer Gesamtheit; alsdann wird die Wahrscheinlichkeit, dass (x) das Alter $x + m$ erreicht, durch eine bestimmte Funktion von x und $x + m$, $p(x, x + m)$ gemessen, für alle positiven Werte x und m, die ein gewisses Grenzalter ω, das niemand überlebt, nicht überschreiten.»

Axiom II. «Es sei $p(x, x + m)$ die Wahrscheinlichkeit, dass (x) das Alter $x + m$, $p'(y, y + n)$ die, dass (y) das Alter $y + n$ erreicht. Dann sind diese beiden Wahrscheinlichkeiten für alle positiven Zahlen x, y, m, n voneinander unabhängig, falls sie sich auf zwei verschiedene Individuen beziehen.

Eine Gesamtheit Γ von Individuen besteht aus lauter gleichartigen Risiken, wenn für irgend zwei Individuen dieser Gesamtheit

[1]) Nach *H. Broggi:* Versicherungsmathematik, Deutsche Ausgabe, S. 59.

$$p(x, x+m) = p'(y, y+n)$$

ist, sobald $x = y$, $m = n$ ist.

Aus Axiom I und II folgt, falls $0 < n < m$ ist,

$$p(x, x+m) = p(x, x+n)\, p(x+n, x+m)$$

woraus weiter

$$p(x+n, x+m) = \frac{p(x, x+m)}{p(x, x+n)}.$$

Die Funktion $kp(x, a)$ von x und a bezeichnen wir mit l_a und nennen sie die Zahl der Lebenden des Alters a.

Für $n = 0$ wird

$$p(x, x+m) = \frac{l_{x+m}}{l_x}$$

$$l_{x+m} = l_x p(x, x+m).»$$

Von den Bohlmannschen Axiomen wird bis in die neueste Zeit Gebrauch gemacht, so von *Broggi* und *Berger* [1]) auch in ihren Lehrbüchern. Berger schreibt in seinem Aufsatz für den XII. Internationalen Kongress der Versicherungsmathematiker 1940 [2]): «Als entscheidend hat sich dabei die Annahme von der Unabhängigkeit der Sterbens- und Überlebenswahrscheinlichkeiten herausgestellt.» «Diese lässt sich noch konkreter fassen: nimmt jemand eine Versicherung auf sein (nicht auf verbundene) Leben, so ist seine Prämie nicht abhängig von der Höhe der Prämie, die ein anderer in demselben Jahr eintretender Versicherter zu zahlen hat. Diese selbstverständliche Forderung des praktischen Betriebes folgt aus dem Unabhängigkeitsaxiom [3]).»

Im Sinne der Auffassung von Broggi [4]), «... einem allgemeinen Sprachgebrauche folgend, werden wir die willkürlich angenommenen

[1]) *A. Berger:* Mathematik der Lebensversicherung, 1939.

[2]) Welche Hypothesen liegen der Versicherungsmathematik zugrunde und wie kann die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Risikotheorie im Versicherungswesen begründet werden? Kongressband IV.

[3]) *Georg Bohlmann:* Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung; Atti del IV.° congresso internazionale dei matematici, Roma 1909, Vol. III, S. 278.

[4]) Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Dissertation, Göttingen 1907.

und zur Grundlegung einer bestimmten Disziplin gestellten Forderungen die ‚Axiome' dieser Disziplin nennen...», können die Bohlmannschen «Axiome» wirklich Axiome genannt werden. Denn Bohlmann selbst hat gezeigt, dass sich darauf das ganze Gebäude der Versicherungsmathematik einschliesslich der Risikotheorie aufbauen lässt; auch Berger wies später wiederholt auf diese Tatsache hin. Broggi bewies ausserdem die Vollständigkeit, Widerspruchslosigkeit und Unabhängigkeit der einzelnen Axiome nach dem Vorbild der *Hilbertschen* «Grundlagen der Geometrie». Der allgemeine Sprachgebrauch hingegen geht — oder ging wenigstens — eher dahin, da schon «ein Begriff bei dem Worte sein muss», solche «willkürlich angenommenen Forderungen» *Hypothesen* zu nennen, unter Axiomen dagegen allgemein angenommene, letzte Grundsätze zu verstehen[1]). Das Bohlmannsche «Axiom» II ist in den seltensten Fällen erfüllt; es ist eine reine Annahme, auf Grund deren sich die Probleme vereinfachen, wie etwa die Auffassung von undehnbaren, unelastischen

[1]) Vgl. dazu bei den Griechen: *ἀξίωμα: ὅ ἔστιν ἀληθὲς ἢ ψεῦδος ἢ πρᾶγμα αὐτοτελὲς ἀποφαντὸν ὅσον ἐφ' ἑαυτῷ, Diogenes* Laaertius VII, 1, 48. Ähnlich bei *Aristoteles:* Metaphysik IV 3 m 1005 *a* 20; Physik VIII 8, 252 *a* 24. Nach *Boetius:* «propositio per se nota, quam quisque probat auditum». Nach *Kant* sind Axiome «synthetische Grundsätze a priori, sofern sie unmittelbar gewiss sind». (Kritik der reinen Vernunft, Methodenlehre I. Hauptteil, I. Abschnitt.) Sie zeichnen sich also aus durch Notwendigkeit und Allgemeinheit. Diese Auffassung gab man auf nach dem Bekanntwerden der nichteuklidischen Geometrie und deren Erhebung weit über den Bereich der räumlichen Anschauung. *F. Klein* sagt: «Axiome sind Forderungen, vermöge deren wir uns über die Ungenauigkeit der Anschauung oder über die Begrenztheit der Genauigkeit der Anschauung zu unbegrenzter Genauigkeit erheben.» (Nichteuklidische Geometrie, I, autograph. Vorl.; Göttingen 1892, S. 355.) Ferner: «Die Ergebnisse irgendwelcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter partikulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse Aussagen von absoluter Präzision und Allgemeinheit. In dieser Idealisierung der empirischen Daten liegt meines Erachtens das eigentliche Wesen der Axiome.» (Mathematische Annalen, 50, 1898, S. 585.) *H. Reichenbach* meint: «Die Frage der mathematischen Axiome ist geklärt durch die Entdeckung, dass die mathematischen Axiome *Definitionen* sind, d. h. willkürliche Festsetzungen, über die es kein Wahr oder Falsch gibt, und dass nur die logischen Eigenschaften des Systems, Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit, Eindeutigkeit, Vollständigkeit, Gegenstand der Kritik sein können» usw. (Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre; Die Wissenschaft 72, S. 1.) Auch *Poincaré* nennt die Axiome «verschleierte Definitionen» (La Science et l'Hypothèse, p. 66). Nach *Hilbert* sind die Axiome «implizite Definitionen». Ähnlich bei *A. Einstein* (Geometrie und Erfahrung), *Schlick* (Allgemeine Erkenntnislehre).

Körpern in der Physik. Der Begriff des Axioms erlitt im Laufe der Zeit manche Umdeutung. Von philosophischer Seite ist so vieles unter diesen Namen gefasst worden, dass mit *D'Alembert* gesagt werden darf: «Nous devons bien des erreurs à l'abus des mots; c'est peut-être à ce même abus que nous devons les axiomes.»

Versuchen wir weiter die Frage zu lösen: Was ist durch eine Axiomatisierung für die Versicherungsmathematik gewonnen? — Vorerst nehmen wir Kenntnis, dass auch vom Standpunkt des reinen Mathematikers aus die Ansichten über eine derartige Formalisierung der einzelnen Disziplinen durchaus geteilt sind. Bezeichnend dafür sind die folgenden Worte von *Gerhard Kropp* [1]): «Das System *Euklids* ist seit über zwei Jahrtausenden wirksam durch die ‚axiomatische Methode', welche Euklid anwendet, um Gewissheit der Ergebnisse verbürgen zu können. Die axiomatische Methode ist nun seit der im vorigen Jahrhundert erfolgten Entdeckung der nicht euklidischen Geometrien das methodische Prinzip einer grossen Gruppe von Mathematikern, der sogenannten Formalisten, geworden, welche erstens die an sich unbedeutenden, aber doch vorhandenen Lücken in Euklids Axiomensystem ausgefüllt haben *(Pasch, Hilbert)* und zweitens glauben, die gesamte moderne Mathematik, insbesondere auch die Analysis durch Aufstellen eines vollständigen, unabhängigen und widerspruchsfreien Axiomensystems in ihrem logischen Aufbau sichern zu müssen... Diese ganzen Bestrebungen haben nun das Antlitz der Mathematik in bemerkenswerter Weise umgestaltet: Nicht nur die an sich formale Algebra, sondern auch die Analysis und sogar die Geometrie sind in erheblichem Masse ‚formalisiert' worden, so dass die Beziehungen zu dem aussermathematischen Denken immer mehr geschwunden sind. Es ist, um mit *Felix Klein* (1849—1925), dem genialen Wegbereiter psychologisch richtiger Unterrichtsweise, zu reden, die genetische Darstellungsweise gegenüber der logisch auskristallisierten Form immer mehr in den Hintergrund getreten. Dass auf diese Weise z. B. die Wege, auf denen die Forscher zu ihren Ergebnissen gelangen, undurchsichtig werden, liegt auf der Hand... Hierzu muss jedoch folgendes gesagt werden: ...was wäre dadurch für den *Sinn* der Mathematik gewonnen, wenn wir einmal die einwandfreie Durchführung des formalistischen Programms, des Nachweises

[1]) Der Sinn der Mathematik, Aufsatz in der «Deutschen Allgemeinen Zeitung» vom 18. Januar 1943, Reichsausgabe.

der Widerspruchsfreiheit der gesamten Mathematik, als vollzogen unterstellen? Widerspruchsfreiheit wäre erreicht, aber ist das *Wahrheit*? Nehmen wir umgekehrt einmal an, der Widerspruchsfreiheitsbeweis sei auf dem begonnenen Wege nicht zu vollbringen, würde man dann im Ernst am Wahrheitswert der Mathematik zweifeln, einer Mathematik, die im Laufe ihrer mehrtausendjährigen Geschichte die zwingende Kraft ihrer Beweisverfahren dargetan hat, die durch ihre Anwendungen in Physik und Technik die Tragfähigkeit ihres Gebäudes und ihrer Schlussweisen aufs glänzendste erwiesen hat?»

Durch das Axiom I wird einem einzelnen Individuum (x) einer Gesamtheit eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zugelegt. Dadurch soll, nach Bohlmanns eigenen Worten, eine «fingierte Absterbeordnung für ein Individuum» gegeben sein. Wie aber mit einem einzigen Element eine Absterbeordnung verbunden sein soll, ist für uns nicht vorstellbar. Es ist doch vielmehr so, dass durch Axiom I die Absterbeordnung einer beliebig grossen Gesamtheit gleichmöglicher Fälle (Risiken) abgeleitet werden kann, weil eben $p(x, x+n)$ als mathematische Wahrscheinlichkeit, somit als Quotient von günstigen zu gleichmöglichen Fällen aufgefasst wird. Durch Axiom II wird darüber hinaus die für die Rechnung unentbehrliche Unabhängigkeit angenommen.

Über die weitere Natur aber der durch Axiom I postulierten Wahrscheinlichkeiten wird keine Aussage getroffen, insbesondere nicht über die wichtigste, die zeitliche Konstanz. Und doch darf von Wahrscheinlichkeitsrechnung erst dann gesprochen werden, wenn eine derartige Konstanz oder zum mindesten eine eindeutige Abhängigkeit von der Zeit vorliegt. Wendet man ein, die Konstanz sei per definitionem in den Wahrscheinlichkeiten $p(x, x+n)$ enthalten, so ist sie dies auf unbeschränkte Zeit. Es wäre dann aber sinnlos, nachträglich Untersuchungen über Dispersion, Trend usw. durchzuführen, da ein «Axiom» nicht auf einen mehr oder weniger grossen Wahrheitsgehalt geprüft werden kann.

Es ist kaum nötig zu sagen, dass die Annahme einer zeitlichen Konstanz der Wahrscheinlichkeiten von unbeschränkter Dauer jeder Erfahrung zuwiderläuft und für den Versicherungsbetrieb unhaltbar ist. Tatsächlich sind die Wahrscheinlichkeiten $p(x, x+n)$ mittels grosser Zahlen erhaltene Durchschnittswerte, die praktisch mehr oder weniger eine statistische Wahrscheinlichkeit darstellen. Den Begriff

auf ein einzelnes Individuum anzuwenden ist unzulässig [1]), es gibt keine individuelle Wahrscheinlichkeit.

Zusammenfassend dürfen wir folgendes festhalten: Soll das Gebäude der Versicherungsmathematik axiomatisch aufgebaut werden, jedoch die Erfordernisse einer angewandten Wissenschaft erfüllen, so muss neben den Bohlmannschen Axiomen noch eine weitere Voraussetzung über die Wahrscheinlichkeiten als Funktionen der Zeit eingeführt werden. Eine derart erweiterte schematische Grundlegung ist wieder nur ein Modell; es kommt aber der Wirklichkeit schon bedeutend näher.

c) Die v. Misessche Wahrscheinlichkeitstheorie und die Lebensversicherungsmathematik

Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit setzt Bedingungen voraus, die in der Lebensversicherung weitgehend unerfüllt sind. Will man den formalen Aufbau der Lebensversicherungsmathematik nicht auf die Bohlmannschen Axiome stellen, so bleibt noch der Weg offen, den Begriff der Wahrscheinlichkeit so zu wählen, dass er der tatsächlichen Erfahrung Rechnung trägt. Diesem Vorgehen schien die von *R. v. Mises* aufgestellte Kollektivmasslehre [2]) zu entsprechen. Die wesentlichen Kennzeichen der Theorie werden von R. v. Mises selbst in die folgenden Worte zusammengefasst [3]):

«1. Von Wahrscheinlichkeit kann erst gesprochen werden, wenn ein wohlbestimmtes, genau umgrenztes Kollektiv vorliegt.

2. Kollektiv ist eine Massenerscheinung oder ein Wiederholungsvorgang, bei der Erfüllung von zwei Forderungen, nämlich: es müssen die relativen Häufigkeiten der einzelnen Merkmale be-

[1]) So schreibt z. B. *R. v. Mises:* «Man rechnet damit, dass innerhalb der Gesamtheit aller künftigen Versicherungsnehmer der betrachteten Kategorie gerade 11 von tausend im 41. Lebensjahre sterben. — Über den angegebenen Rahmen hinaus hat aber die Zahl 0,011 keinerlei Bedeutung. Völlig sinnlos wäre es zu sagen, der jetzt 40jährige Herr N. N. habe 11 von tausend Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines Jahres zu sterben. Meint man vielleicht einen um so ‚richtigeren' Wert zu bekommen, je mehr man von den Eigenschaften des Individuums berücksichtigt, d. h. je enger man das Kollektiv abgrenzt, als dessen Glied man jenes betrachtet, so gelangt man an kein Ende.» (Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, 1928, S. 19.)

[2]) Ansätze sind vorhanden seit 1914; Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, 1928; Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1931.

[3]) Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, 1928, S. 29.

stimmte Grenzwerte besitzen und diese müssen ungeändert bleiben, wenn man durch willkürliche Stellenauswahl einen Teil der Elemente aus der Gesamtheit heraushebt.

3. Das Erfülltsein der letzten Forderung bezeichnen wir auch als das Prinzip der Regellosigkeit oder Prinzip vom ausgeschlossenen Spielsystem.
4. Den gegen Stellenauswahl unempfindlichen Grenzwert der relativen Häufigkeit, mit der ein bestimmtes Merkmal auftritt, nennen wir die ‚Wahrscheinlichkeit für das Auftreten dieses Merkmals innerhalb des betrachteten Kollektivs'. Wenn dieser Zusatz zu dem Worte ‚Wahrscheinlichkeit' gelegentlich fortbleibt, so geschieht es nur der Kürze halber, er muss in Gedanken immer ergänzt werden.»

Die Einwände seitens der reinen Mathematik gegen die Theorie von R. v. Mises haben wir nicht näher zu untersuchen. Sie richten sich besonders gegen das Grenzwertaxiom, das wegen der Regellosigkeit nicht definiert sei. Denn der Grenzwert der Mathematik ist gerade eine Eigenschaft des Bildungsgesetzes der Folge: auf Grund des Bildungsgesetzes der Folge lasse sich immer ein Glied angeben, von dem an die Abweichungen von einem festen Wert, dem Grenzwert, kleiner sind als eine beliebig kleine vorgegebene Grösse.

Zur Frage, ob die Definition von R. v. Mises in der Statistik und besonders in der Lebensversicherungsmathematik brauchbar sei, wird vorerst allgemein von *Mally* festgestellt [1]): «Dieser Wahrscheinlichkeitsbegriff setzt 1. eine unendliche Folge von Fällen voraus, die in aller Wirklichkeit weder gegeben noch durch ein Bildungsgesetz begrifflich festzulegen ist. Er ist 2. nicht auf den einzelnen Fall und auch nicht auf eine endliche Reihe von Fällen anwendbar, d. h. er ist auf Wirklichkeit überhaupt nicht anwendbar; denn die blosse Annahme eines Grenzwertes p enthält keine Annahme über das Verhalten der Häufigkeit der α-Fälle in einer tatsächlich vorliegenden oder zu erwartenden endlichen Reihe von β-Fällen, weil jedes mit der Grenzwertannahme verträglich ist.»

Riebesell [2]) berichtet folgendermassen: «Fragen wir zunächst einmal, ob wir es in der Lebensversicherung mit echten Kollektiven zu

[1]) *E. Mally:* Wahrscheinlichkeit und Gesetz, 1938, S. 20.

[2]) Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematikerkongress in Zürich 1932; abgedruckt in den Blättern für Versicherungsmathematik, Band 2, 1932, S. 395.

tun haben, so müssen wir prüfen, ob ein Grenzwert in der relativen Häufigkeit vorhanden ist und ob das Axiom der Regellosigkeit erfüllt ist. Als Kollektiv haben wir die Reihe der Versicherungsobjekte anzusehen und — da nur Vollschäden möglich sind — haben wir die Merkmalsalternative 0 oder 1, wenn der Eintritt eines Schadens mit 1, der Eintritt des Nichtschadens mit 0 bezeichnet wird. Das Kollektiv sieht also etwa folgendermassen aus:

0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, ...

Darin ist das Ergebnis eines Zeitabschnitts, im allgemeinen also das eines Jahres, veranschaulicht. Wollen wir nun feststellen, ob es sich hier um eine beliebige Teilfolge eines echten Kollektivs handelt, so betrachten wir die Ergebnisse mehrerer Jahre. Wären sie beliebige Teilfolgen eines echten Kollektivs, so würde sich, wenn man in jeder Teilfolge die relative Häufigkeit für das Auftreten der 1 feststellen würde, eine Gauss-Verteilung ergeben. Die Umkehrung dieses Satzes gilt aber nicht. Ich darf nicht schliessen, dass, wenn für mehrere Jahre die Häufigkeiten eine Gauss-Verteilung aufweisen, unbedingt das zugrunde liegende Kollektiv ein echtes Kollektiv im Sinne der Misesschen Definition ist. Dieser Schluss ist immer nur mit den durch das Gaußsche Wahrscheinlichkeitsintegral gezogenen Grenzen zulässig. Immerhin kann als erstes Erkennungsmerkmal für die Existenz einer Wahrscheinlichkeit das Kriterium der Gauss-Verteilung der relativen Häufigkeiten dienen.»

Auf Grund der früher genannten Untersuchungen von *Lange* sieht Riebesell den Beweis grundsätzlich als geglückt an, dass es sich bei den Wahrscheinlichkeiten q_x um eine Gauss-Verteilung handelt. «Natürlich muss man die säkularen Schwankungen durch Ermittlung des Trends eliminieren und die zufälligen Schwankungen in bezug auf den Trend bestimmen.»

Es seien hier weiter die Worte von R. v. Mises selbst angeführt: «Die ‚Sterbenswahrscheinlichkeit', mit der die Versicherungsgesellschaften rechnen, wird nach einem Verfahren ermittelt, das sich in keinem wesentlichen Punkte von demjenigen unterscheidet, das wir zur Definition der Wahrscheinlichkeit im Falle des Würfelspieles benutzt haben [1].» Im selben Werke aber berichtet von Mises über die grosse übernormale Dispersion der Sterbewahrscheinlichkeiten.

[1] Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, 1928, S. 18.

In den Ausführungen über das Dispersionsmass sahen wir, wie selten eine Gauss-Verteilung gegeben ist und wie wenig wir eine solche erwarten können. Und doch darf nach der Misesschen Auffassung von Wahrscheinlichkeit erst gesprochen werden, wenn eine solche vorliegt. Durch die Ausschaltung der säkularen Schwankungen kann eine Gauss-Verteilung erreicht werden; aber das Kriterium von *Lexis*, auf das sich Riebesell beruft, hat ja eben nicht die Aufgabe, die *physikalische* Schwankungskomponente auszuschalten — um das Wort von Lexis zu gebrauchen —, sondern gibt uns eine zahlenmässige Angabe über die Änderung der Grundwahrscheinlichkeit. Zudem liegt der Wahl der Trendfunktion sowie der Art der Konstantenbestimmung eine grosse Willkür inne [1]).

Wären in die Untersuchungen von *Lange* auch Epidemienjahre einbezogen worden, so hätte sich sehr wahrscheinlich eine stark übernormale Dispersion ergeben. Wenn sich auch durch Ausschaltung jeder Trenderscheinung aus den Sterbewahrscheinlichkeiten echte Kollektive finden liessen, so wäre damit für die Praxis nicht viel gewonnen; diese Sterbenswahrscheinlichkeiten würden an denselben Fehlern kranken wie bei der Auffassung als Wahrscheinlichkeiten a priori. Es bleiben die Erstellung zeitgemässer Rechnungsgrundlagen und die Dispersionsuntersuchungen immer noch die wichtigste Aufgabe, da jede Prämienrechnung nach einer festen Tafel ohne Trendüberlegungen vorgenommen wird.

Wie steht es mit dem *Regellosigkeitsaxiom*, über das sich Riebesell nicht näher aussprach? v. Mises selbst sagt, es sei erfüllt, wenn die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten innerhalb des Kollektivs gegen Stellenauswahl unempfindlich seien. Das ist aber in unserem gegebenen Kollektiv nur bedingt der Fall, d. h. nur unter Voraussetzung der Unabhängigkeit der einzelnen Risiken voneinander. Es müssen also, will man nicht auf die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung verzichten, dieselben Voraussetzungen getroffen werden, wie sie im Bohlmannschen Axiom II enthalten sind, oder, um mit v. Mises selbst zu reden, «wenn es eine Möglichkeit gäbe, die relative Häufigkeit, mit der der Versicherungsfall eintritt, im grossen abzuändern dadurch, dass man etwa jeden zehnten Versicherungsnehmer oder dergleichen ausscheidet, so wäre die ganze finanzielle Basis des Unter-

[1]) Vgl. *P. Lorenz:* Das Trendproblem in der Konjunkturforschung, Blätter für Versicherungsmathematik, Band 2, 1932.

nehmens in Frage gestellt. Was das Energieprinzip für das elektrische Kraftwerk, das bedeutet unser Satz vom ausgeschlossenen Spielsystem für das Versicherungswesen: die unumstössliche Grundlage aller Berechnungen und aller Massnahmen» [1]).

Nehmen wir für den Augenblick an, die v. Misessche Theorie sei *die* Wahrscheinlichkeitstheorie. Wäre dann, da ein echtes Kollektiv mit Grenzwert in den relativen Häufigkeiten und mit der Regellosigkeit praktisch nie gegeben ist, jede Wahrscheinlichkeit aus der Lebensversicherungsmathematik zu entfernen? [2]) Wir sind nicht dieser Ansicht; denn es steht uns hier, wie in jeder Wissenschaft, völlig frei, *die* Voraussetzungen zu treffen, nach denen die Probleme erst der Rechnung zugänglich sind.

d) Die Abhandlungen des XII. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940; allgemeiner Rückblick

Der XII. Internationale Kongress der Versicherungsmathematiker 1940 in Luzern war, wie wir schon in der Einleitung festgehalten haben, mit der Behandlung der folgenden Frage beauftragt: «Welche Hypothesen liegen der Versicherungsmathematik zugrunde und wie kann die Anwendung der Wahrscheinlichkeits- und Risikotheorie im Versicherungswesen begründet werden? Wie kann die Theorie unter besonderer Berücksichtigung ihrer Fortschritte für die Praxis nutzbar gemacht werden? Welche Bestätigung findet die Wahrscheinlichkeits- und Risikotheorie durch Erfahrungen aus dem Versicherungswesen?»

Die eingegangenen Berichte sind weit davon entfernt, die aufgeworfene Frage zu einem gewissen Abschluss zu bringen, und «es will scheinen, dass die Ansichten der verschiedenen Aktuare mehr denn je differieren: Die einen verneinen die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Versicherungsprobleme, andere bejahen sie oder setzen sie als unumgänglich voraus, und über den Begriff der Wahrscheinlichkeit selbst herrscht erst recht keine einheitliche Meinung» [3]).

---

[1]) Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, 1928, S. 26.

[2]) Eine solche Auffassung vertritt z. B. *Englund* in der österreichischen Revue 1932, Nrn. 15—19.

[3]) *H. Jecklin:* Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen; Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 41, 1941, S. 55.

Wir wollen im folgenden die Abhandlungen soweit durchgehen, als es für unsere Aufgabe notwendig ist. Die Arbeiten sind gleichsam die letzte Schau, welche über dieses Thema gegeben worden ist; aus ihrer Besprechung ergibt sich zugleich ein allgemeiner Rückblick.

Mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit selbst befasst sich *Boschan* [1]). Er glaubt, die Kluft zwischen mathematischer und empirischer Auffassung in der Wahrscheinlichkeitstheorie könne überbrückt werden, sofern man sich auf den von *Schlick* vertretenen Standpunkt stellt, wonach man immer vom Mittel der offenen Definition Gebrauch macht, d. h. es immer offen lässt, ein Urteil auf Grund neuer Erfahrungen zu revidieren oder einen Sachverhalt «kausal» zu erklären.

Eine Antwort auf die eigentliche Frage, «Welche Hypothesen liegen der Versicherungsmathematik zugrunde», geben *Berger* [2]) und *Baptist*, aber auch nur andeutungsweise. Berger nimmt dabei Bezug auf die früher genannten Bohlmannschen Axiome in ihrer ursprünglichen Gestalt und weist nach, dass neben einer solchen wahrscheinlichkeitstheoretischen Begründung nur noch das Äquivalenzprinzip als Arbeitshypothese in Betracht komme. Als zentraler Begriff der Versicherungsmathematik erscheint ihm die Prämienreserve, wofür er, fussend auf dem Begriff der mittleren Verlusterwartung, eine neue Definition gibt. Danach ist die Prämienreserve jener Rücklage gleich, für welche stets das kleinste mittlere Risiko für die restliche Versicherungsdauer gegeben ist.

Ein weniger aprioristisches Vorgehen zeigt die Abhandlung von *Baptist* [3]). Nach ihm ist die erste Hypothese das Kausalitätsprinzip. So schreibt er: «L'hypothèse qui est à la base des recherches actuarielles, c'est tout d'abord le principe de causalité qui nous porte à conclure que ce qui vient de se passer d'une certaine manière se passera d'une façon identique dans l'avenir pourvu naturellement que rien ne soit changé aux données. Du point de vue strictement mathématique, c'est une pure hypothèse; du point de vue pratique, c'est un sentiment conforme aux enseignements de l'expérience et dont nous ne pouvons

[1]) Some Considerations Concerning Probability in Actuarial Science and the Foundation of the Extended Life Table; Kongressband I.

[2]) Welche Hypothesen liegen der Versicherungsmathematik zugrunde und wie kann die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Risikotheorie im Versicherungswesen begründet werden? Kongressband IV.

[3]) Le calcul des probabilités dans le domaine de l'assurance; Kongressband I.

nier la valeur objective sans condamner notre esprit à la stagnation perpétuelle. — Pour l'actuaire-assureur, hypothèse ou sentiment, il ne saurait s'en passer sans nier du même coup la possibilité de l'assurance» [1]). Die Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Versicherungsmathematik steht für Baptist ausser allem Zweifel, denn «si la science entière procède, dans toutes ses applications, d'une logique probabilitaire, *a fortiori* doit-il en être ainsi dans l'étude des fréquences ou des moyennes ou des écarts. Il serait cependant exagéré de vouloir y trouver autre chose que des indications puisque nos séries actuarielles ne sont jamais «infinies» et encore moins «uniformes» [2]).

Auch *de Finetti* [3]) ist der Ansicht, die Wahrscheinlichkeit sei das einzig geeignete Werkzeug zur Behandlung von Versicherungsproblemen; dagegen sollte man sich dieser Disziplin im Hinblick auf die zu lösenden Aufgaben mehr in intuitiver Weise bedienen, statt Bezug zu nehmen auf zu enge und abstrakte Schemas (Urne, Kollektiv). «Per quanto riguarda le basi dell'assicurazione vita, sarebbe opportuno eliminare dalla terminologia corrente quelle denominazioni che conducono anche involontariamente il pensiero verso lo schema delle ‚società fittizie'. Così l_x et d_x anzichè come ‚numero dei sopravviventi' risp. ‚dei morti' su, ad es., 100 000 nati, si potrebbero fondamentalmente definire come probabilità, per un nato, di sopravvivere all' età x, risp. di morire tra le età x e $x+1$; il fatto che esse, scrivendole moltiplicate per 100 000, rappresentino anche la speranza matematica del numero di sopravviventi o morti su 100 000 nati non è che un corollario interessante della definizione di speranza matematica, ed è bene farlo presente, ma non farlo risaltare fino a trascurare o mettere in ombra il significato probabilistico» [4]).

Nach *Hammon* und *Clarke* [5]) besteht ein kaum zu überbrückender Widerspruch zwischen Wahrscheinlichkeitsauffassung a priori und a posteriori, und der Erfolg in der Lebensversicherungsmathematik hängt nur vom klugen Einhalten eines Ausgleichs zwischen den beiden Theorien ab. Die Verfasser machen die Anregung, erhöhte Risiken auf

---

[1]) Kongressband I, S. 120.

[2]) Kongressband I, S. 129.

[3]) Il calcolo delle probabilità nel dominio dell' assicurazione; Kongressband I.

[4]) Kongressband I, S. 256.

[5]) Some Effects upon Insurance Problems of Modern Criticisms of the Frequency Theory of Probability; Kongressband I.

eine Anzahl von Klassen zu verteilen und für jede dieser Klassen eine besondere Statistik zu führen. Ein erhöhtes Risiko werde der geeigneten Klasse zugewiesen auf Grund von Betrachtungen a priori, aber die Wahrscheinlichkeiten, die ihm später beizulegen sind, werden aus Häufigkeitswerten abgeleitet. Für die Lebens- und Sterbenswahrscheinlichkeit besteht eine organische Kraft, welche die abgeleiteten Werte auf engere Grenzen beschränkt als zu erwarten wäre, wenn diese gänzlich von äusseren Umständen abhängen würden. Der hauptsächlichste Unterschied zwischen der Statistik der Lebensversicherung und derjenigen anderer Versicherungszweige besteht gerade darin, dass für diese letzten die organische Kraft nicht vorhanden ist.

Die Aufgabe einer Nachprüfung der Sterbenswahrscheinlichkeit auf normale Dispersion stellten sich *Redington* und *Michaelson* [1]). Sie fanden auf Grund der Tafeln A 1924—1929, dass die üblichen, auf der elementaren Wahrscheinlichkeitstheorie beruhenden Methoden für die Selekttafel zulässig sind, nicht aber für die Schlusstafel. Dafür sind nicht nur die säkularen Sterblichkeitsschwankungen verantwortlich, sondern auch die wachsende Heterogenität in der gegebenen Gesamtheit von Lebenden.

Auch die Arbeit von *Nolfi* [2]) ist einer empirischen Nachprüfung der Sterbenswahrscheinlichkeiten gewidmet. Da die Wahrscheinlichkeiten sowohl von zufälligen als auch von systematischen Fehlern beeinflusst sind, stützt sich der Verfasser zu deren mathematischen Erfassung auf zwei voneinander abhängige Gaußsche Verteilungskurven. Durch Entwicklung in eine Brunssche Reihe gelangt er zu einer formelmässigen Darstellung, der wir für die Zukunft grössere praktische Bedeutung beimessen möchten.

Zum Schluss wollen wir auf jene Arbeiten eingehen, welche der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen eher ablehnend gegenüberstehen.

Nach *Hagstroem* [3]) sind es statistische Mittelwerte, denen in der Praxis der Versicherung die grösste Wichtigkeit zukommt. Die zufälligen Abweichungen und somit die Risikotheorie sind kaum von

---

[1]) An Aspect of the «a priori» Probability Theory of Mortality; Kongressband I.

[2]) Die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Erfassung; Kongressband I.

[3]) Quelques réflexions sur le rôle de la théorie des probabilités dans l'assurance pratique; Kongressband I.

praktischer Bedeutung, da die systematischen Abweichungen viel wesentlicher sind und die Frage nach den notwendigen Reserven nicht befriedigend beantwortet werden kann. Das Studium der mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung zusammenhängenden Fragen ist für den Aktuar genau so wie für jeden Natur- und Wirtschaftswissenschaftler im Sinne einer Erweiterung seines Wissens und Bereicherung seiner wissenschaftlich-philosophischen Weltanschauung wünschenswert, aber keineswegs eine Notwendigkeit.

Ivo Lah fasst seine Meinung wie folgt zusammen: «Zur Bildung der verschiedenen Gesamtheiten der Lebenden, Toten, Invaliden usw. bedarf es überhaupt keiner Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aus diesen Gesamtheiten bekommt man mit den vier elementaren Rechenoperationen die Häufigkeiten, welche auch statistische Wahrscheinlichkeiten genannt werden. Die Ausgleichung kann graphisch oder mechanisch ausgeführt werden, und die Kontrolle durch Vergleichen der beobachteten mit den rechnungsmässigen Fällen erfolgen usw. Kein Urnenschema, kein Bernoullisches Theorem, keine Pearsonsche Kurve, keine Wahrscheinlichkeitsansteckung usw. sind zu dieser Arbeit notwendig.» Danach «sind wir zu der Anschauung gelangt, die in der Statistik schon allgemein bekannt ist, nämlich, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung für statistische Forschungsverfahren unbrauchbar sei» [1]). Es wird dann vorgeschlagen, statistische Reihen einfach graphisch oder numerisch festzustellen, woraus sehr leicht Saisonschwankungen, Konjunkturwellen usw. ersichtlich sind, die mittels einfacher mathematischer Formeln erfasst werden können.

In der Arbeit von *Ten Pas* [2]) wird wohl die schroffste Ablehnung der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie auf die Lebensversicherung vertreten, ohne indessen einen andern Weg zu zeigen. Der Verfasser sagt: «Die Wahrscheinlichkeitsrechnung kann uns niemals einen Rechenprozess liefern, mittels dessen aus den Eigenschaften der vergangenen Erscheinungen auf solche der zukünftigen Erscheinungen geschlossen werden darf, da man die zukünftigen Begleitumstände nicht kennen kann. ...Bei der Berechnung der Prämien und der Deckungskapitalien wird sodann eine auf nichts gestützte Voraus-

[1]) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungswesen; Kongressband I, S. 419.

[2]) Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Versicherungsmathematik; Kongressband I.

setzung gemacht, nämlich, dass diese ‚Wahrscheinlichkeiten' für die nächste Zukunft konstant bleiben werden. Diese Annahme hat zu Mathematik, Wahrscheinlichkeitsrechnung oder mathematischer Erwartung keine Beziehung. Sie ist gewissermassen eine vollkommen freie Tat eines Kaufmannes, der sich auf die Vergangenheit stützt, die ihm in den meisten Fällen einen Gewinn geliefert hat, und es wagt, auf Grund gewisser Zahlen einen weiteren Kontrakt zu schliessen. Er weiss aber nichts von den zukünftigen Zahlen»[1]). Die Wahrscheinlichkeitsrechnung sei überhaupt im allgemeinen auf Erscheinungen mit fortwährend variierenden Eigenschaften nicht anwendbar, Eigenschaften also, worauf wirtschaftliche Umstände oder biologische Prozesse einen Einfluss haben und zu denen auch die Sterblichkeitserscheinungen gehören.

Wir wollen die kurz beschriebenen Kongressarbeiten einer knappen kritischen Würdigung unterziehen, besonders im Hinblick auf die verschiedenen darin vertretenen Auffassungen. Wir unterscheiden deren drei: I. Die ablehnende Haltung gegenüber der Wahrscheinlichkeitstheorie, II. Die empirische Auffassung. III. Die rationalistische Auffassung.

I. Die ablehnende Haltung

Die Gründe, die hiefür angegeben werden, sind unseres Erachtens nicht entscheidend. Wenn z. B. behauptet wird, die Probleme der Lebensversicherungsmathematik würden sich von denen der Finanzmathematik nicht unterscheiden, so genügt es, darauf hinzuweisen, dass der Versicherungsbarwert seiner Natur nach eine mathematische Erwartung darstellt. Die Probleme der Finanzmathematik haben zum voraus determinierten, diejenigen der Lebensversicherung nur Wahrscheinlichkeitscharakter; bei den ersten erfolgt die Auszahlung auf alle Fälle, bei den zweiten nur nach Wahrscheinlichkeiten.

Wenn ferner behauptet wird, es seien nur statistische Mittelwerte, die in der Lebensversicherungsmathematik verwendet würden, so ist das unseres Erachtens ein Streit um Worte; denn diese statistischen Mittelwerte sind, bei normaler Dispersion (und nur dann hat die Rechnung einen Sinn), eben empirische, statistische Wahrscheinlichkeiten; es wird mit ihnen gerechnet nach den Regeln der vollständigen und zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit. Ein Entscheid für das

[1]) Kongressband I, S. 265.

näherungsweise Auftreten der hiefür notwendigen Bedingungen der Konstanz, der Chancengleichheit und der Unabhängigkeit der Fälle wird durch das Dispersionskriterium geliefert. Der geschichtliche Weg von *Huygens* bis zur Neuzeit (abgesehen von den wenig bedeutenden Ausführungen A. Wagners) ist, wie wir früher belegten, jedenfalls doch der, dass die Versicherungsprobleme stets wahrscheinlichkeitstheoretisch aufgefasst worden sind. Erinnern wir uns auch des bekannten Ausspruches von *H. Poincaré*, wonach die Gewinne der Versicherungsgesellschaften der beste Beweis für die Richtigkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung seien.

Den in der Versicherungsrechnung auftretenden statistischen Wahrscheinlichkeiten den Charakter von Wahrscheinlichkeiten überhaupt absprechen, hiesse beinahe jede Anwendung der Wahrscheinlichkeit auf die belebte Natur verneinen; denn wir kennen hier keine andern Wahrscheinlichkeiten als statistische. Vergegenwärtigen wir uns die Ergebnisse und Methoden der modernen Physik und Biologie, die darlegen, dass «Wahrscheinlichkeit der Stoff der Welt» ist — wie sich *Edington* ausdrückt —, so wirkt die Ansicht von Ten Pas eher befremdend. Richtig hingegen ist, dass die von ihm genannten Erscheinungen, also auch die Sterblichkeitsprobleme, ohne geeignete Hypothesen der Rechnung nicht zugänglich sind. Während Ten Pas die Annahme einer Konstanz der Wahrscheinlichkeiten q_x «eine vollkommen freie Tat eines Kaufmanns» nennt, «die zu Mathematik und Wahrscheinlichkeit keine Beziehung» hätte, sind wir eher mit J. Baptist der Meinung, dass wir Kraft des Kausalitätsprinzipes als Hypothese annehmen: was sich in der Vergangenheit zutrug, ereignet sich in Zukunft in gleicher Weise, sofern natürlich an den hierfür nötigen Umständen nichts geändert wird. Dann dürfen wir auch hier das Prinzip der Induktion anwenden; wir formulieren es nach *Poincaré* folgendermassen: «Wenn ein Vorgang A einmal eine Folge B hervorgebracht hat, so wird ein Vorgang A′, der wenig verschieden von A ist, eine Folge B′ hervorbringen, die wenig verschieden von B ist. Wie wissen wir aber, dass die Fälle A und A′ ‚wenig verschieden' sind? Wenn irgendeiner der Umstände durch eine Zahl ausgedrückt werden kann, und diese Zahlen in den beiden Fällen sehr nahe Werte haben, so ist die Bedeutung des Wortes ‚wenig verschieden' verhältnismässig klar; das Prinzip bezeichnet dann die Folge als eine kontinuierliche Funktion des Vorangegangenen. Und als praktische Regel ergibt sich

die Schlussfolgerung, dass man das Recht hat zu interpolieren. Das tun die Gelehrten auch wirklich täglich, und ohne Interpolation wäre alle Wissenschaft unmöglich [1].» Auf unsern Fall übertragen heisst es, dass wir allen Rechtes an einen regelmässigen Verlauf der Funktion $q_x(i)$ (i = Beobachtungsjahre) glauben dürfen, welche wir, je nach Ermessen, als konstant, linear fallend oder sonstwie annehmen können. Wenn von *Ten Pas* gesagt wird, «über die zukünftigen Zahlen sei nichts bekannt» [2], so können wir ebenfalls wieder mit *Poincaré* antworten, es sei auch nicht sicher, dass nächstes Jahr das Newtonsche Gesetz noch gilt, während wir es trotzdem verwenden zu Vorausberechnungen. «Les faits prévus ne peuvent être que probables. Si solidement assise que puisse nous paraître une prévision, nous ne sommes jamais absolument sûrs que l'expérience ne la démentira pas. Mais la probabilité est souvent assez grande pour que pratiquement nous puissions nous en contenter [3].»

II. Die empirische Auffassung

In einigen Kongressarbeiten wird ein gemilderter *Empirismus* vertreten. Es sollen keine Hypothesen angenommen werden, um innerhalb eines Schemas die Rechnungen auszuführen; nur die direkte Beobachtung wird uns sichere Resultate liefern, insbesondere ist eine Statistik über Gewinn- und Verlustquellen für die Risikotheorie wertvoller als eine auf dem künstlichen Urnenschema fussende wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegung. Sehr schroff wurde diese Ansicht schon früher von einigen Statistikern vertreten. So schreibt z. B. *Wolff:* «Das Gesetz der Kausalität, einst auf den geistigen Weltthron gesetzt, ist entthront. Nur empirisch feststellbare Beziehungen... können wirtschaftliche Wegweiser sein [4].» Wir kennen diese Auffassung unter dem Namen Empirismus oder Positivismus, der im wesentlichen auf *Comte* zurückgeht [5]. Danach ist die einzige Quelle der Erfahrung die Sinneserkenntnis und ihre verfeinerte Form, das Experiment. Jedes Erkennenwollen ausserhalb dieses Rahmens sei

[1]) Der Wert der Wissenschaft, deutsch von *E. und H. Weber*, 3. Auflage S. 194.

[2]) Kongressband I, S. 265.

[3]) La Science et l'Hypothèse, p. 213.

[4]) Lehrbuch der Konjunkturforschung, 1928, S. 39.

[5]) Vgl. auch den Aufsatz von *Nolfi:* Versicherungsmathematik und Wirklichkeit; Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 41, 1941.

«sinnlos», und *Mach* war der Ansicht, «dass alles Metaphysische als müssig und die Ökonomie der Wissenschaft störend zu eliminieren sei» [1]). Auch die Hypothesen durften nach ihm nur einen «denkökonomischen Wert» haben, und falls solche postuliert werden müssten, sollten sie nur neue Sinneswahrnehmungen prophezeien. Bürgerrecht hat einzig das Messbare.

Obwohl die Verdienste des Positivismus gross sind, da er die Experimentalwissenschaften erst geschaffen und besonders auch die Lebensversicherungsmathematik ohne Statistik eine Wissenschaft ohne Halt wäre, so verurteilt er doch seiner Natur nach Hypothesen, die sich nicht unmittelbar auf die Erfahrung stützen können; es wäre z. B. die Risikotheorie mit ihren wertvollen Errungenschaften zum Verschwinden verurteilt. Eine Versicherungsmathematik ohne Hypothesen kann es überhaupt nicht geben. Bei einer axiomatischen Grundlegung ist die Frage schon entschieden; diese Axiome sind Hypothesen; aber auch durch reine Empirie, durch direktes Beobachten, durch Entscheide von Fall zu Fall, sind die Probleme nicht zu lösen (wenigstens nach dem heutigen Stande der naturwissenschaftlichen Methoden).

III. Die rationalistische Auffassung

Das Gegenteil zum Positivismus ist der *Rationalismus.* Er wird z. B. in der Arbeit von *Berger* vertreten, da dieser die Bohlmannschen Axiome, die in ihrem Charakter abstrakt und jeder Empirie bar sind, als Grundlage voraussetzt. Wir können auch dieser Auffassung nicht folgen, besonders nicht der Annahme der q_x als Wahrscheinlichkeiten mit a priori Charakter, wonach es also im selben Sinne «wahr» ist, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit eines 20jährigen die in der Tafel angegebene Grösse q_{20} ist, wie es wahr ist, dass man mit einer idealen Münze mit der Wahrscheinlichkeit ½ «Kopf» wirft. Es wird hier bewusst die Tatsache ausser acht gelassen, dass die Sterbenswahrscheinlichkeit eine relative Häufigkeit ist. Zudem teilen wir die neuere Auffassung der Wahrscheinlichkeitstheoretiker, die allgemein dahin geht, dass es eine Wahrscheinlichkeit a priori überhaupt nicht geben kann. So schreibt z. B. *Mally:* «Wenn man schon ... mit der vorgängigen Annahme des Bestandes einer Wahrscheinlichkeits- oder Verteilungsgesetzlichkeit an die Beobachtung herangeht, wie an die Er-

[1]) Analyse der Empfindungen, 2. Auflage, 1900, S. VII.

probung eines Würfels, so macht man von einer allgemeineren Erfahrung Gebrauch, dass dergleichen Körper sich so und so zu verhalten pflegen, oder man steht, ohne sie ausdrücklich heranzuziehen, unter ihrem Einfluss: die Voraussetzung ist selbst eine, wenn auch nicht in klare Formen gefasste und nicht planmässig gewonnene Induktion[1]).» Nicht nur wäre bei der Annahme der q_x als Wahrscheinlichkeiten a priori eine nachträgliche Dispersionsuntersuchung unlogisch, sondern diese Annahme ist auch unnötig, da das Bernoullische Gesetz auch für Durchschnittswahrscheinlichkeiten gilt, wie *Poisson* nachwies.

Konnte zur Zeit Bohlmanns eine solche rationalistische, dogmatische Grundlegung noch mit einigem Recht vertreten werden, so wirkt sie heute, nach dem empirischen Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie und nach den Ergebnissen der Naturphilosophie, wonach wir bekannte Kantsche Kategorien, wie Kausalität, Raum und Zeit, als a posteriori erkannt haben, eher veraltet. Der Gegensatz Empirismus — Rationalismus scheint heute überhaupt überbrückbar zu sein. So schreibt *Hans Reichenbach:* «Die ratio, von der hier (in der heutigen Naturphilosophie) die Rede ist, ist nicht jene dogmatische ratio des älteren Rationalismus, die aus einem System kategorialer Schubfächer bestand, in welche alle Erkenntnis gewaltsam hineingepresst wird; sondern diese ratio ist selbst wandelbar, ist einer Entwicklung unterworfen, zu der sie durch die Forderung der ständigen Anpassung an die Erfahrung gezwungen wird... Moderner Empirismus ist kein Widerspruch zu Rationalismus; denn Erkenntnis wird hier als ein von der Vernunft konstruiertes System gefasst, für welches die Erfahrung nur eine regulative, eine auswählende Funktion besitzt. Verzichtet wird aber ... auf notwendige Voraussetzungen der konstruierenden Vernunft; diese selbst unterliegt vielmehr ebenfalls der regulativen Funktion der Erfahrung [2]).»

Wir möchten unsere Ansicht abschliessend dahin aussprechen, dass einerseits logische Grundlegung, anderseits aber Fruchtbarkeit in der Lebensversicherungsmathematik nur verbürgt ist durch eine Verbindung des Standpunktes II mit III (von Empirismus mit Rationalismus), dass es also auch hier zu einer Komplementarität kommen muss wie z. B. in der Physik. Dieser Auffassung scheint uns auch *de Finetti* zu sein, wenn er in seiner Kongressarbeit sagt, dass es frucht-

[1]) Wahrscheinlichkeit und Gesetz, 1938, S. 32.

[2]) Ziele und Wege der heutigen Naturphilosophie, 1931, S. 54.

barer sei für den Aktuar, sich in intuitiver Weise der Wahrscheinlichkeitsrechnung für die Probleme zu bedienen, statt auf starre und zu spezielle Schemas Bezug zu nehmen. Der Schöpfer der axiomatischen Grundlegung selbst, *Bohlmann*, sagte: «Logisches Schliessen allein, blosse Denkformen, die allein Gegenstand der abstrakten Wahrscheinlichkeitsrechnung sind, können nie eine Erfahrung, nie beobachtete Tatsachen ersetzen. Die Aufgabe ist nur die, solche Schemen logisch widerspruchsfrei und in zweckmässiger Form aufzustellen, so dass sie die Erfahrung einerseits nicht doktrinär zu antizipieren versuchen, anderseits die aus ihr gewonnenen Resultate in übersichtlicher Weise zusammenzufassen gestatten [1]).»

Nachdem wir dargelegt haben, dass der Aufbau der Lebensversicherungsmathematik durch Empirismus allein, also durch blosses statistisches Erfassen, nicht möglich ist, die bisher im Axiomatismus vertretene rationalistische Auffassung den Anschluss an die Erfahrung jedoch vermissen lässt, stellen wir im zweiten Teil der Arbeit jene Hypothesen zusammen, die, wie uns scheint, von jeher der Theorie und Praxis zugrunde lagen.

---

[1]) Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung; Atti del IV.° congresso internazionale dei matematici, Roma 1909, Vol. III, p. 265.

II. TEIL

Die Hypothesen der Lebensversicherungsmathematik

> Pour entreprendre un calcul quelconque de probabilité, et même pour que ce calcul ait un sens, il faut admettre, comme point de départ, une hypothèse ou une convention qui comporte toujours un certain degré d'arbitraire. *Poincaré.*

Hypothese I. Ist (x) eine im Alter von x Jahren stehende Person aus einer Gesamtheit von möglichst gleichaltrigen Personen, so bezeichne die Funktion ${}_tq_x = \frac{A(x,t)}{n(x,t)}$ die Wahrscheinlichkeit für die Person, innerhalb des Altersintervalls $x,\ x+t$ zu sterben. Dabei ist $n(x,t)$ die Zahl der in diesem Intervall der Sterbegefahr ausgesetzten Personen, $A(x,t)$ die Zahl der daraus hervorgegangenen Toten.

Hypothese II. Ist ${}_tq_x$ die Wahrscheinlichkeit, dass (x) im Altersintervall $x,\ x+t$ stirbt, ${}_nq'_y$ die Wahrscheinlichkeit, dass (y) im Intervall $y,\ y+n$ stirbt, dann seien diese beiden Wahrscheinlichkeiten für alle Werte x, y, t, n voneinander unabhängig.

Eine Gesamtheit von Personen besteht aus lauter gleichartigen Risiken, wenn für irgend zwei Personen dieser Gesamtheit ${}_tq_x = {}_nq'_y$ ist, sobald $x = y$ und $t = n$ ist.

Hypothese III. Die Umstände, welche die Funktion ${}_tq_x$ bestimmen, seien auch in Zukunft annähernd die gleichen, oder die Häufigkeitsverteilung der ${}_tq_x(i)$ sei normal, wo i (Beobachtungsjahr) über eine gewisse Periode erstreckt wird.

Hypothese IV. Aus I. und II. folgt, wobei $n(x,t) = L_{x+t}$,

$$ {}_tq_x = \frac{A(x,t)}{n(x,t)} = \frac{L_{x+t} - L_x}{L_x} $$

$$L_{x+t} = L_x (1 - {}_tq_x)$$

oder

$$l_{x+t} = C\, l_x (1 - {}_tq_x)$$

$$l_x = C \prod_0^{x-1} (1 - q_\xi)$$

Die bis auf einen konstanten Faktor bestimmte Funktion l_x, die wir die Absterbeordnung der als gleichartig anerkannten Personen nennen, setzten wir als *kontinuierlich* voraus; es wird

$$1 - {}_tq_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+\xi}\, d\xi} \qquad \text{wo} \quad (\ln l_x)' = -\mu_x$$

und

$$|l_{x+h} - l_x| < \varepsilon$$

für

$$|h| < \delta \qquad \varepsilon, \delta > 0$$

Befassen wir uns zuerst mit *Hypothese I*. Die Sterbenswahrscheinlichkeit einer Person durch die Verhältniszahl $\frac{A}{n}$ anzugeben, lässt sich aus dem Bernoullischen Theorem in Verbindung mit dem Theorem von *Bayes* begründen.

Nehmen wir an, die betrachtete Person entstamme einer Gesamtheit von Personen, die als gleichartig anerkannt sind. Welcher Art diese Gesamtheit ist (Versicherte, Invalide, Witwen u. dgl.), bleibt für die Ableitung belanglos. Es sei ferner die Hypothese II als gültig vorausgesetzt; ebenso gelte die Hypothese III, ansonst die Umkehrung des Bernoullischen Theorems nicht erlaubt ist.

Es habe nun die statistische Ermittlung ergeben, dass in einer grossen Zahl n von Beobachtungen das Ereignis E (Sterben) A-mal, das komplementäre Ereignis $\bar{E}$ (Überleben) $B = (n - A)$-mal eingetroffen sei. Welche Schlüsse lassen sich daraus auf die unbekannten Wahrscheinlichkeiten q und p ziehen? Oder, in die Sprache der Häufigkeitstheorie übersetzt, es seien mehrere Stichproben $\frac{a_i}{b_i}$ gemacht worden, die wir auf Grund der Hypothesen II und III als Teilfolgen eines echten Kollektivs auffassen können. Welches ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Merkmals innerhalb des betrachteten Kollektivs?

Es ist $\binom{n}{A} q^A (1-q)^B$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei n Beobachtungen das Ereignis E A-mal, das Ereignis E dagegen B-mal eintrifft, gleichgültig in welcher Reihenfolge. Nun ist aber die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis E in der Verhältniszahl $\frac{A}{n}$ mit der für uns unbekannten Wahrscheinlichkeit q produziert werde, nach dem Bayesschen Theorem gegeben durch

$$W = \frac{\binom{n}{A} q^A (1-q)^B dq}{\int_0^1 \binom{n}{A} q^A (1-q)^B dq},$$

wobei die Zahl der Ursachen (Todesursachen) beliebig gross sein kann, also dem Ereignis E jede zwischen $0-1$ liegende Wahrscheinlichkeit zugeschrieben werden soll.

Es ist das Eulersche Integral

$$\int_0^1 q^A (1-q)^B dq = \frac{A!\, B!}{(n+1)!};$$

somit wird

$$W = \frac{(n+1)!}{A!\, B!} q^A (1-q)^B dq .$$

Die *wahrscheinlichste Hypothese* über die bedingenden Umstände des beobachteten Ereignisses ist durch jenen Wert von q gekennzeichnet, der W zu einem Maximum macht. Es ist dies der Fall, wenn

$$q^A (1-q)^B = \text{Maximum}$$

oder

$$\frac{d}{dq} q^A (1-q)^B = A q^{A-1} (1-q)^B - B q^A (1-q)^{B-1} =$$

$$= q^{A-1} (1-q)^{B-1} [A(1-q) - Bq] = 0$$

woraus

$$A = (A+B)q = nq$$

$$q = \frac{A}{n}.$$

Wir fassen das Ergebnis in den Satz: Die wahrscheinlichste Hypothese spricht dafür, dass die im Grunde unbekannte Sterbenswahrscheinlichkeit einer Person aus einer Gesamtheit als gleichartig anerkannten Personen gegeben ist durch den Quotienten $\frac{A}{n}$, wo A die statistisch ermittelten Toten aus einer möglichst grossen Zahl n dieser Gesamtheit darstellt.

Bei *Bohlmann* war der Weg der folgende: Als *Axiom I* galt: «Es sei (x) ein im Alter x stehendes Individuum einer Gesamtheit; alsdann wird die Wahrscheinlichkeit, dass (x) das Alter $x + m$ erreicht, durch eine bestimmte Funktion von x und $x + m$, $p(x, x + m)$ gemessen, für alle positiven Werte x und m, die ein gewisses Grenzalter ω, das niemand erlebt, nicht überschreiten.» — Über die Natur dieser Funktion wird aber gar keine Aussage getroffen.

Demgegenüber haben wir durch die Hypothese I einen Ausdruck für die Sterbenswahrscheinlichkeit einer Person gewonnen, den wir aber weder zu einer Definition noch zu einem Axiom stempeln wollen, sondern als Hypothese auffassen. Dies aus dem Grunde, weil wir der Ansicht sind, die Wahrscheinlichkeit könne überhaupt nicht definiert werden, sondern sei lediglich eine Hypothese. Für die sogenannte Wahrscheinlichkeit a priori ist dies ohne weiteres ersichtlich, wenn wir annehmen, dass es eine solche Wahrscheinlichkeit überhaupt nicht geben kann, da sich alle Wahrscheinlichkeiten auf konkrete Dinge beziehen und daher Wirklichkeitsaussagen sind. Aber auch die Wahrscheinlichkeit a posteriori ist nicht definierbar. *v. Mises* glaubte zwar an die Möglichkeit einer Definition, indem er ausführte: «Unter Verwendung einer von Kant eingeführten Bezeichnung könnte ich auch sagen: es ist nicht unsere Absicht, eine *analytische* Definition der Wahrscheinlichkeit zu geben, sondern eine *synthetische*, wobei wir die grundsätzliche Möglichkeit analytischer Definitionen dahingestellt sein lassen können [1].» Wenn sich aber *v. Mises* schon auf Kant berufen wollte, so hätte er folgende Stelle nicht übersehen sollen: «Da die Synthesis der empirischen Begriffe nicht willkürlich, sondern empirisch ist und als solche niemals vollkommen sein kann (weil man in der Erfahrung immer noch mehr Merkmale des Begriffes entdecken kann), so können empirische Begriffe auch nicht definiert werden [2].»

[1]) Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit, S. 5.
[2]) Logik, Meiner, 1928, S. 154.

Ob die in *Hypothese II* angenommene Unabhängigkeit der Fälle zutrifft und inwieweit von der in *Hypothese III* vorausgesetzten Konstanz der ${}_tq_x(i)$ gesprochen werden darf, können wir am Lexisschen Dispersionskriterium untersuchen [1]).

a) Für alle unsere Beobachtungen gelte das Gaußsche Fehlergesetz

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \varepsilon^2}. \tag{1}$$

Sind also

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -l_1 + X \\ \varepsilon_2 &= -l_2 + X \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon_n &= -l_n + X \end{aligned} \tag{2}$$

die wahren Fehler, die man bei der Bestimmung der Grösse X begangen hat, so ist

$$e^{-h^2\left(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\ldots+\varepsilon_n^2\right)}$$

nach (1) proportional der Wahrscheinlichkeit, dass diese Fehler $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ sind. Der Ausdruck (1) wird zu einem Maximum, falls

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 = \text{Minimum},$$

d. h. $$\frac{\delta}{\delta l_1}(X-l_1)^2 + \frac{\delta}{\delta l_2}(X-l_2)^2 + \ldots + \frac{\delta}{\delta l_n}(X-l_n)^2 = 0$$

woraus

$$X = x_0 = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{n}. \tag{3}$$

Das arithmetische Mittel ist also, die Geltung von (1) vorausgesetzt, derjenige Wert der Unbekannten, der der wahrscheinlichsten Hypothese entspricht. Die scheinbaren Fehler λ_i der Unbekannten werden demnach am kleinsten, wenn man sie auf das arithmetische Mittel x_0 bezieht. Also

[1]) Wir folgen hier im wesentlichen den Ableitungen in *H. Broggi:* Versicherungsmathematik, und *E. Czuber:* Wahrscheinlichkeitsrechnung, Band I.

$$\lambda_1 = -l_1 + x_0$$
$$\lambda_2 = -l_2 + x_0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\lambda_n = -l_n + x_0. \tag{4}$$

Welchem Gesetze unterliegen nun die λ_i? Zunächst ergibt sich durch Summierung von (4) unter Berücksichtigung von (3)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 0.$$

Weiter folgt aus (2) und (4)

$$\varepsilon_1 - \lambda_1 = X - x_0$$
$$\varepsilon_2 - \lambda_2 = X - x_0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varepsilon_n - \lambda_n = X - x_0 \tag{5}$$

oder $$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n = n(X - x_0). \tag{6}$$

Mit Hilfe von (5) und (6) lassen sich die scheinbaren Fehler durch die wahren ausdrücken wie folgt

$$\lambda_1 = \frac{n-1}{n}\varepsilon_1 - \frac{1}{n}\varepsilon_2 - \frac{1}{n}\varepsilon_3 - \dots - \frac{1}{n}\varepsilon_n$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{n}\varepsilon_1 + \frac{n-1}{n}\varepsilon_2 - \frac{1}{n}\varepsilon_3 - \dots - \frac{1}{n}\varepsilon_n \qquad \text{usw.,}$$

woraus

$$M(\lambda_1^2) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 M(\varepsilon_1^2) + \frac{1}{n^2} M(\varepsilon_2^2) + \frac{1}{n^2} M(\varepsilon_3^2) + \dots + \frac{1}{n^2} M(\varepsilon_n^2).$$

Ersetzt man $M(\lambda_1^2)$ durch $\frac{[\lambda\lambda]}{n}$ [1]) und alle $M(\varepsilon_i^2)$ durch μ^2, so entsteht die Gleichung

$$\frac{[\lambda\lambda]}{n} = \left\{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{n^2}\right\}\mu^2 = \frac{n-1}{n}\mu^2;$$

[1]) [ ] bedeutet das Gaußsche Klammersymbol für die Summe.

daraus folgt

$$\mu^2 = \frac{[\lambda\lambda]}{n-1}. \tag{7}$$

Wären anderseits alle Fehler in unseren Beobachtungen nur zufälliger Natur, so würde der mittlere Fehler m nach Definition

$$m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 \varphi(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

oder nach Einsetzen von (1)

$$m^2 = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon^2 e^{-h^2\varepsilon^2} d\varepsilon = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2h^2},$$

$$m^2 = \frac{1}{2h^2}$$

Den Quotienten $Q = \frac{\mu}{m}$ nennen wir nach *Lexis* Dispersionsmass.

b) Eine unbekannte Grösse X sei n-mal, jedoch unter ungleichen Bedingungen, beobachtet worden, so dass den Beobachtungsergebnissen $l_1, l_2, \ldots l_n$, deren Fehler dem Exponentialgesetz unterworfen seien, verschiedene Genauigkeit zukommt; die Präzisionsmasse $h_1, h_2, \ldots h_n$ seien als bekannt vorausgesetzt.

Nach den Überlegungen des vorhergehenden Abschnittes haben wir die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{h_1 h_2 \ldots h_n}{(\sqrt{\pi})^n} e^{-\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 h_i^2} d\varepsilon_1\, d\varepsilon_2 \ldots d\varepsilon_n$$

zu einem Maximum zu machen; dies trifft zu, wenn

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \varepsilon_i^2 = \text{Minimum}.$$

Daraus folgt die Gleichung

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i^2 x_i}{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}. \tag{8}$$

Ist ein System von Grössen $g_1, g_2, \ldots g_n$ derart gegeben, dass

$$h_1^2 : h_2^2 : \ldots h_n^2 = g_1 : g_2 : \ldots g_n,$$

so nennt man es das System der Gewichte. Einer Beobachtung vom Gewichte g entsprechen g Beobachtungen vom Gewichte 1.

Da $$h_1^2 = \frac{1}{2\mu_1^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mu^2}{\mu_i} = g_i ,$$

so ergibt sich zwischen dem mittleren Fehler μ_i einer Beobachtung vom Gewichte g_i und dem mittleren Fehler μ einer Beobachtung vom Gewichte 1 die Beziehung

$$\mu = \mu_i \sqrt{g_i} .$$

Überträgt man diese Beziehung auf die einzelnen Abweichungen vom Mittelwert x_0, so wird der Abweichung λ_i einer Beobachtung vom Gewichte g_i bei einer Beobachtung vom Gewichte 1 die Abweichung

$$\lambda_i' = \lambda_i \sqrt{g_i}$$

entsprechen. Aus der Formel (7) aber ergibt sich der mittlere Fehler der Gewichtseinheit

$$\mu = \sqrt{\frac{[\lambda'\lambda']}{n-1}}$$

oder

$$\mu = \sqrt{\frac{[g\,\lambda\lambda]}{n-1}} . \tag{9}$$

Auch in diesem Falle bezeichnen wir den Quotienten $\frac{\mu}{m}$ als Dispersionsmass.

Nehmen wir für unser Beispiel an, die Beobachtungswerte seien die Sterbenswahrscheinlichkeiten (oder die relativen Häufigkeiten) $q_x(i)$. Jede Verhältniszahl $q_x(i)$ ist ein Näherungswert des der Serie von Beobachtungen zugrunde liegenden Mischungsverhältnisses, das selbst wieder um einen Mittelwert schwankt. Die aus den beobachteten Grössen berechnete Zahl μ setzt sich dann aus zwei Komponenten m und p quadratisch zusammen, von denen m aus Schwankungen herrührt, die bei konstanter Wahrscheinlichkeit zu erwarten sind, während

p auf der physikalischen Änderung des Mischungsverhältnisses von Serie zu Serie beruht: $\mu^2 = m^2 + p^2$. Es ist also $Q = \frac{\mu}{m}$ stets grösser als die Einheit (übernormale Dispersion). Für die physikalische Schwankungskomponente ergibt sich der Ausdruck

$$p = m \sqrt{Q^2 - 1}$$

Wir haben für die 22 Jahre umfassende Periode von 1889 bis und mit 1910 die Dispersion der einjährigen Sterbenswahrscheinlichkeiten in der *schweizerischen männlichen Bevölkerung* bestimmt. Die Berechnungen wurden unter Berücksichtigung der Gewichte (d. h. der Zahl der Lebenden) nach Formel (9) durchgeführt. Wir fanden:

Alter x	Dispersionsmass Q	Alter x	Dispersionsmass Q	Alter x	Dispersionsmass Q
0	6,33	8	2,52	40	1,54
1	5,19	9	2,20	45	1,40
2	4,50	10	1,30	50	1,36
3	4,73	15	1,15	55	1,42
4	3,74	20	1,16	60	1,15
5	2,96	25	1,64	65	1,20
6	3,17	30	1,61	70	1,67
7	2,53	35	1,78	75	1,32
				80	1,46

Um insbesondere zu sehen, inwieweit die Hypothese III zutrifft und damit von einer zufälligen Verteilung der $q_x(i)$ in einer langen Periode gesprochen werden kann, haben wir die Dispersion für die 100 Jahre von 1891 bis 1981 untersucht, wobei die q_x eines jeden 10. Jahres verwendet wurden. Bis zum Jahre 1940 liessen sich die q_x bestehenden Sterbetafeln entnehmen, d. h. aus ihnen interpolieren: vom Jahre 1940 aufwärts wählten wir die Werte aus einer Vorausberechnung von *Baltensberger* [1]), wobei die Ergebnisse zwangsläufig von der Voraussetzung abhängen, dass diese Extrapolation tatsächlich zutrifft. Wir fanden:

[1]) Über die Vorausberechnung der Sterblichkeit der schweizerischen Bevölkerung; Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 41, 1941.

Alter x	Dispersionsmass Q	Alter x	Dispersionsmass Q
25	3,87	50	4,85
30	4,14	55	3,72
35	5,53	60	3,57
40	5,16	65	3,44
45	5,02	70	3,21
		75	2,42

Es ist für die Würdigung des Ergebnisses indessen festzuhalten, dass Baltensberger Sterbenswahrscheinlichkeiten vorausberechnete, die für die höheren Alter in Wirklichkeit wohl zu gross sind; die Erfahrungen für die Jahre 1933—1937 haben dies bewiesen. Würden wir dem Rechnung getragen haben, so hätten sich Q ergeben, die sämtlich zwischen den Grenzen 3 und 5 liegen; es wäre also bedeutend übernormale Dispersion vorhanden. Für beide Berechnungen wurde verzichtet, die $q_x(i)$ in bezug auf den Trend zu bereinigen, da sich dann für jede beliebige Periode, die keine besonderen Epidemien aufweist, die $Q \sim 1$ ergeben hätten, während aber wichtig ist zu wissen, wie sich in längeren Zeiträumen die physikalische Schwankungskomponente bemerkbar macht.

Schliesslich berechneten wir die Dispersionsmasse der einjährigen Sterbewahrscheinlichkeit der *Volksversicherten* der Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft für die 25 Versicherungsjahre umfassende Periode 1912 bis 1936. Wir erhielten:

Altersgruppe x	Dispersionsmass Q
0 [1])	1,41
1— 9	1,12
10—19	2,20
20—29	15,82
30—39	3,72
40—49	1,94
50—59	1,45

[1]) Für dieses Alter beträgt die Beobachtungsperiode nur die 14 Jahre von 1923 bis 1936. Die Lebendenzahlen bewegen sich in der Grössenordnung 500 bis 1500.

Aus der Tabelle entnehmen wir die folgenden Ergebnisse: Während wir für die 0jährigen in der schweizerischen Bevölkerung für die 22 Jahre umfassende Beobachtungsperiode 1889—1910 ein Dispersionsmass $Q = 6{,}33$ bestimmten, ergab sich bei den Volksversicherten für die 14 Jahre 1923—1936 ein $Q = 1{,}41$. Dieser grosse Unterschied erhellt: Erstens aus der bedeutend kürzeren Beobachtungsperiode, zweitens aus der Selektion, die bei den Versicherten zum Unterschied mit der allgemeinen Bevölkerung mitspielt und besonders zur Folge hat, dass die Zusammensetzung der Bestände viel homogener ist, drittens und hauptsächlich daraus, dass die Kindersterblichkeit in den Jahren 1889—1910 viel bedeutenderen Schwankungen unterworfen war als in der Periode 1923—1936. Die beiden zuerst genannten Gründe erklären auch, warum die Altersgruppe 1—9 normale Dispersion aufweist, während dies für die schweizerische Bevölkerung nicht der Fall ist.

Für die Altersgruppen 10—19, 20—29 und 30—39 kann von normaler Dispersion nicht entfernt die Rede sein. Der Grund hierfür liegt einzig in der Grippeepidemie vom Jahre 1918, die hauptsächlich in diesen Altern ihre Opfer suchte. So betrugen z. B. die Todesfälle in der Altersgruppe 20—29 für das im Jahre 1918 beginnende Versicherungsjahr rund das Dreifache als in normalen Jahren. In der genannten Altersgruppe, in welcher die mittlere Lebendenziffer 27 300 beträgt, sind 60 % aller Abweichungen von der mittleren Sterbewahrscheinlichkeit grösser als ihre mittlere quadratische Abweichung σ, ja 40 % der Abweichungen betragen sogar über $2\,\sigma$, und das Katastrophenjahr 1918 weist eine Abweichung von über $24\,\sigma$ auf oder ungefähr 265 % der mittleren Sterbewahrscheinlichkeit [1] [2].

---

[1]) Bekanntlich liegen bei der Normalverteilung rund 32 % der Abweichungen ausserhalb σ und rund 5 % ausserhalb $2\,\sigma$.

[2]) *H. Jecklin* hat (Ist die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Lebensversicherung besser fundiert als in der Sachversicherung?; Kongressband I, S. 377 ff.) für die Sterbewahrscheinlichkeit in der Altersgruppe 30½—34½ und die Periode 1919—1930 der Grosslebensversicherten der Schweizerischen Lebensversicherungs- und Rentenanstalt ein Dispersionsmass von 1,12 bestimmt. Diese, verglichen mit unseren Ergebnissen, geringe übernormale Dispersion erklärt sich *a)* aus der starken Selektion der Grosslebensversicherten, weil der Aufnahme eine ärztliche Untersuchung vorangeht, *b)* aus der kürzeren Beobachtungsperiode. *c)* hauptsächlich daraus, dass die Beobachtungsperiode 1919—1930 die Grippe-Todesfälle nicht enthält.

Aus dem Vergleich und der Diskussion der von uns berechneten Werte wollen wir die folgenden Schlüsse ziehen: Eine normale Verteilung der Sterbewahrscheinlichkeit q_x kann — versicherte Personen und völlig normale, d. h. kriegs- und epidemienfreie Jahre vorausgesetzt — heute für eine Dauer von 20 Jahren als plausibel angenommen werden, und zwar, wie die letzte Tabelle zeigt, auch für die Kinder- und Säuglingssterblichkeit. Jedoch bei geringen, nicht durch den Zufall bedingten Abweichungen ergibt sich eine stark übernormale Dispersion, und die relative Häufigkeit q_x, die «Sterbewahrscheinlichkeit», kann dann nicht entfernt als eine Wahrscheinlichkeit angesprochen werden. Als Ganzes gesehen sind daher die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur mit der nötigen Vorsicht auf die Probleme der Lebensversicherung anzuwenden, und wir müssen uns stets Rechenschaft darüber geben, inwieweit die Hypothesen II und III erfüllt sind.

Offen gelassen haben wir in unserer Untersuchung die Frage, wie weit ein Dispersionsmass $Q > 1$ noch durch den Zufall bedingt sein kann, d. h. von welchem Werte $Q > 1$ an wir von tatsächlicher übernormaler Dispersion sprechen dürfen. Wir behalten uns vor, auf diese wichtige Fragestellung später zurückzukommen.

Die *Hypothese IV* ist eine reine Arbeitshypothese. Die grundsätzliche Unbestimmbarkeit des Vorganges des «Absterbens» zwingt uns, auf die Annahme eines «Naturgesetzes» zu verzichten; wir nehmen die statistisch ermittelten Werte l_x als die wahrscheinlichsten an. Bilden wir daneben die Hypothese eines *kontinuierlichen* Verlaufes dieser stets nur diskontinuierlichen Funktion l_x, so ergeben sich auch alle Wahrscheinlichkeiten, die Änderungen dieser Funktion des Alters x betreffen, als kontinuierliche Grössen; dies bietet keine Schwierigkeit, da die $q(x)$ sicher von der stetig fliessenden Zeit abhängen.

Wir bezeichnen die Abnahme der Zahl der Lebenden (Absterbeordnung) in dem Zeitelement dx, bezogen auf die Funktion selbst, als Intensität der Sterblichkeit; also ist

$$\frac{dl_x}{dx}\frac{1}{l_x} = -\mu(l_x).$$

Die Funktion $\mu(l_x)$ besitzt wie die Logarithmusfunktion die Eigenschaft, die rechnerischen Operationen um einen Grad zu erniedrigen.

Sie hat für die Absterbeordnung l_x dieselbe Bedeutung wie die Differentialgleichung eines physikalischen Vorganges für den Vorgang selber. Wir machen also das gewaltige Hilfsmittel der Infinitesimalrechnung der Versicherungsmathematik dienstbar und erreichen dadurch in vielen Rechnungen eine Vereinfachung der Formeln und eine bessere Übersichtlichkeit.

Eine Grundlegung der Lebensversicherungsmathematik könnte auch darin bestehen, dass man axiomatisch die Existenz der Funktion $\mu(l_x)$ voraussetzt, die dann etwa an Stelle des Bohlmannschen Axioms I zu treten hätte. Der so erhaltene Aufbau aber würde einem mathematischen Selbstzweck dienen.

Schluss

Wir blicken auf das Problem der Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Lebensversicherungsmathematik zurück. Von Wahrscheinlichkeitstheoretikern [1]) ist wiederholt dargelegt worden, die Prüfung der Wahrscheinlichkeitsrechnung an der Wirklichkeit könne nicht Aufgabe der Mathematiker sein. Der Einzelwissenschaft bleibe es indessen überbunden, jene Voraussetzungen zu treffen, welche dann die Anwendung der Definitionen und Sätze auf die gestellten Fragen gestatten, oder aber darzulegen, dass auf die Wahrscheinlichkeitstheorie verzichtet werden muss. Dieser Verzicht ist aber bisher von niemanden für die Lebensversicherungsmathematik überzeugend dargetan worden. Der I. Teil unserer Arbeit zeigte, wie verkettet Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungsmathematik vom Beginn versicherungsmathematischer Forschung an waren und auch heute noch sind und dass wir nicht davon absehen können, gewisse transzendente Voraussetzungen zu treffen.

[1]) Z. B. von *R. v. Mises:* «In der Frage, ob das Kollektiv etwas Empirisches oder eine Idealisierung ist, bin ich der Meinung, dass das Kollektiv ein durchaus abstrakter, idealer Begriff ist. — Es ist hier die Frage gestellt worden, wie man entscheiden kann, ob eine in der Erfahrung gegebene Folge ein Kollektiv ist... Meiner Ansicht nach ist das kein Problem innerhalb der Wahrscheinlichkeitstheorie, sondern eine Frage, die ausserhalb liegt.» (Diskussion über Wahrscheinlichkeit, Berichte über die erste Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften in Prag 1929; S. 272.)

Ferner *Tornier:* «Ob die Wahrscheinlichkeitsrechnung angewendet werden kann, geht die Mathematik nichts an. Die Praxis zeigt eben, dass man sie anwenden kann» (ebenda, S. 278).

Die Methode aber, nach der die Annahmen getroffen werden sollen, ist nicht eindeutig. Wir belegten, warum wir den von *Bohlmann* beschrittenen Weg des Formalismus nicht gehen können. Seine «Axiome der Lebensversicherung» sind nur eine Spezialisierung seiner «Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung», die auf der damaligen meist vertretenen subjektiven Auffassung beruhen. Ob sich überhaupt ein Axiomensystem für die Lebensversicherungsmathematik mit dem Nachweis der Vollständigkeit, Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit aufstellen lässt, wenn zugleich der Anschluss an die Wirklichkeit gewährleistet werden soll, bleibe dahingestellt. Aber bei dieser Auffassung würde die Lebensversicherungsmathematik in den gewaltigen Streit um den Axiomenbegriff an sich und die Grundlagen der Mathematik verstrickt [1]). Das aber hiesse unseres Erachtens das Wesen der Versicherungsmathematik als einer angewandten mathematischen Disziplin — wie etwa der Physik oder Technik — missverstehen.

Demgegenüber bezeichnen wir unsere Voraussetzungen ausdrücklich als Hypothesen und verlangen von ihnen nicht Vollständigkeit, Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit, sondern Erfüllung durch die Erfahrung. Es liegt in der Natur der Hypothese, dass sie ihren Platz nur solange einnimmt, als keine bessere, d. h. hier wirklichkeitsnahere, sie ersetzt.

Für den heutigen Stand der Lebensversicherungsmathematik scheinen uns die Hypothesen I bis IV unentbehrlich. Durch Hypothese I gewinnen wir die Berechtigung zur Aufstellung einer numerischen Angabe über die sogenannte Sterbenswahrscheinlichkeit einer Person. In den Hypothesen II und III werden die Voraussetzungen getroffen, die diese Grösse erst zu einer Wahrscheinlichkeit und somit der Theorie zugänglich machen, wobei wir die Berufung auf das Induktionsprinzip nochmals hervorheben möchten [2]). Die Hypothese IV endlich scheint uns eine unentbehrliche Arbeitshypothese.

---

[1]) Siehe Anmerkung [1]) über Axiome, S. 177.

[2]) In *Reichenbachs* Wahrscheinlichkeitstheorie bildet das Induktionsprinzip einen wesentlichen Bestandteil, «weil nur unter Zuhilfenahme dieses Axioms die Häufigkeitsaussagen einen für die Anwendung auf wirkliche Dinge fassbaren Sinn erhalten». Ob dabei die Logik durch eine eigene «Wahrscheinlichkeitslogik» erweitert werden muss, wie *Reichenbach* behauptet, bleibe dahingestellt.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 151

I. Teil

Darstellung der geschichtlichen Entwicklung der wahrscheinlichkeitstheoretischen Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik und kritische Stellungnahme

1. Kapitel:
Lebensversicherung und Wahrscheinlichkeitsrechnung bis Jan de Witt 155

2. Kapitel:
Lebensversicherung und Wahrscheinlichkeitsrechnung von Jan de Witt bis Wilhelm Lexis 160
a) Entwicklung der Lebensversicherungsmathematik bis Mitte des 19. Jahrhunderts 160
b) Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bis Mitte des 19. Jahrhunderts 163
c) Entwicklung der Risikotheorie 165

3. Kapitel:
Lebensversicherung und Wahrscheinlichkeitsrechnung von Wilhelm Lexis bis zur Gegenwart 169
a) Das Dispersionsmass 169
b) Die Bohlmannschen Axiome 174
c) Die v. Misessche Wahrscheinlichkeitstheorie und die Lebensversicherungsmathematik 180
d) Die Abhandlungen des XII. Internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker, Luzern 1940; allgemeiner Rückblick . . . 184

II. Teil

Die Hypothesen der Lebensversicherungsmathematik 195

Schluss 207

Curriculum vitae

Ich, *Hans Wiesler*, Bürger von Starrkirch (Solothurn), wurde am 3. März 1917 in Dornach (Solothurn) geboren als Sohn des Alois Wiesler (gestorben 1921) und der Marie Anna geborne Graf. Im Herbst 1938 beschloss ich die Mittelschule mit dem Reifezeugnis an der humanistischen Abteilung des Gymnasiums von St-Maurice. Seit dem Wintersemester 1938 bin ich ununterbrochen an der Universität Basel immatrikuliert, wo ich Mathematik, Versicherungslehre, Nationalökonomie, Rechtslehre, Geographie studierte bei den folgenden Herren Professoren und Dozenten: Spiess, Ostrowski, Niethammer, Hagenbach, Flatt; Renfer, Zwinggi; Furlan, Ritschl, Salin, Wagner, Brogle; Ruck, Simonius, Götzinger, Baumgartner; Jäger, Vosseler, Buxtorf. Allen diesen Herren möchte ich bestens danken für die Anregungen, die ich von ihnen empfangen habe.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Privatdozent Dr. E. Zwinggi, unter dessen Leitung die vorliegende Arbeit entstanden ist und der mir stets in sehr grosszügiger und zuvorkommender Weise mit Rat und Tat zur Seite stand.